

天体物理学III 宇宙流体力学

田中 秀和 2024/2/16

目次

1	流体力学の基礎方程式	3
1.1	流体力学とは	3
1.2	連続の式と質量保存	3
1.3	オイラー方程式と運動量保存	4
1.4	断熱の式	7
1.5	ベルヌーイの定理	8
1.6	エネルギー保存の式	9
1.7	非圧縮性流体, ポテンシャル流	10
1.8	Appendix 理想気体の熱力学	13
2	圧縮性流体	14
2.1	音波	14
2.2	有限振幅の波: 単純波, 希薄波, リーマン不変量	15
2.3	安定な不連続面: 衝撃波と接触不連続	20
2.4	理想気体における衝撃波	21
2.5	初期不連続の時間発展: リーマン問題	24
2.6	定常流における超音速への遷移	26
3	流体の不安定性	28
3.1	静水圧平衡	28
3.2	対流不安定性	29
3.3	接線不連続面での不安定性	31
3.4	一様等方性乱流	34
4	自己重力流体	38
4.1	自由落下	38
4.2	ジーンズの不安定性	39
4.3	ビリアル定理	40
4.4	ポリトロップガス球の静水圧構造	41
5	球対称の流れ	45
5.1	恒星風	45
5.2	降着流	47
5.3	点源爆発による爆風波	48

6	磁気流体力学の基礎	55
6.1	磁気流体力学の基礎方程式	55
6.2	磁場の凍結と拡散	58
6.3	アルフベン波	59
6.4	弱電離プラズマにおける一般化されたオームの法則と誘導方程式	60
7	円盤天体の力学	64
7.1	基礎方程式	64
7.2	円盤天体の自己重力不安定性	66
7.3	降着円盤の進化と構造	68
7.4	Appendix 降着円盤の自己相似解の導出	72
8	相対論的流体力学の基礎	75
8.1	特殊相対性理論の最小知識	75
8.2	連続の式	77
8.3	理想流体のエネルギー運動量テンソル	78
8.4	特殊相対性理論における流体力学方程式	79
8.5	一般相対性理論における流体力学方程式	81
	8.5.1 共変形式の流体力学方程式	81
	8.5.2 球対称自己重力天体の静水圧平衡	82
	8.5.3 静的な重力場における流体力学方程式	82
8.6	相対論的流体力学における音波と衝撃波	84
8.7	超相対論的極限における爆風波	86
8.8	Appendix 球対称静的重力場におけるクリストッフェル記号とリッチテンソル	87

主な参考書

- Landau & Lifshitz (1959) ‘Fluid Mechanics’ (流体力学 1,2 : 東京図書)
- 宇宙流体力学 (培風館) 坂下, 池内著
- Binney & Tremaine (1987) ‘Galactic Dynamics’ Princeton Univ. Press
- Landau & Lifshitz (1951) ‘The Classical Theory of Fields’ (場の古典論 : 東京図書)

本テキスト PDF は以下からダウンロードできる.

https://jupiter.astr.tohoku.ac.jp/~hidekazu/lecture/astrophys_fluid_dyn.pdf

1 流体力学の基礎方程式

1.1 流体力学とは

- 流体力学は、速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ と、密度場 $\rho(\mathbf{x}, t)$, 圧力場 $p(\mathbf{x}, t)$ を求める学問.
- 連続体近似のための条件
系の大きさ (速度場が変化する長さ) \gg 平均自由行程 l , 分子直径 d ($\sim 10^{-10}\text{m}$).

$$l \simeq \frac{1}{n\pi d^2} \sim 10^{13} \left(\frac{n}{10^6 \text{m}^{-3}} \right)^{-1} \text{m}.$$

例えば、星間ガスでは数密度 n は 10^6m^{-3} 程度で、平均自由行程 l は 10^{-3}pc .

1.2 連続の式と質量保存

流体中のある体積 V に対し、流れによる質量の出入りを考えよう.

- 体積の表面 S の一部である微小表面 dS から、時間 Δt の間に出ていく流体の質量は、面 dS の外向きの法線ベクトルを \mathbf{n} とし、次式で書くことができる (図1左)

$$\text{出ていく質量} = \text{密度} \times \text{出ていく体積} = \rho (\Delta t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS). \quad (1.1)$$

これより、体積 V から時間 Δt の間に出ていく流体の総質量は

$$\Delta t \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \Delta t \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (\text{Gauss の定理}). \quad (1.2)$$

- 質量保存の式は (1.2) 式より次のように書ける.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (1.3)$$

これは V 内の質量の減少分は出ていった流体の質量に等しいことを表している.

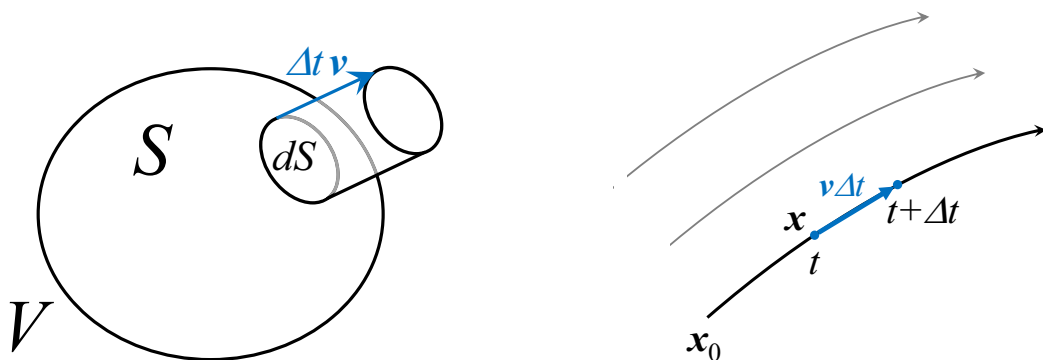


図 1: 左: 体積 V の表面の一部 dS から出る流れ. 右: 流線と流体粒子の運動.

両辺を1つにまとめて

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (1.4)$$

上式は任意の V で成り立つので積分の中身は常に0でなければならない。よって

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \left(\text{または } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \right) \quad (1.5)$$

この方程式は**連続の式**と呼ばれ、流体の密度の時間発展を記述する。

- 上式の divergence の中のベクトル $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ は**質量流束密度 (ベクトル)** と呼ばれる。ベクトルの方向は流れの方向を示し、長さは、単位時間に流れに垂直な単位面積を横切る流体の質量を表す。質量流束密度を (1.2) 式左辺のように面積積分したものが**質量流束**である¹。

1.3 オイラー方程式と運動量保存

(a) 流体の加速度

- 粒子の加速度

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

当然だが**同じ粒子**の異なる時間の速度の差で定義される。

- 流体力学で用いられる、位置 \mathbf{x} での速度の時間偏微分は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

これは、同じ流体粒子に関する速度の差ではないため「加速度」ではない。

- 流体の加速度の表式

加速度とするために、流体粒子の軌道 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ によって速度の差をとる (図1右参照, \mathbf{x}_0 : 流体粒子の初期位置)。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

このように流体の流れによって定義された時間微分を**ラグランジュ微分**と呼ぶ。

¹流束 (フラックス, flux) とはある面を横切る流量である。流れるものにより様々な流束があり、質量流束の他に、エネルギー流束、運動量流束、熱流束、電流等がある。電磁気における電束や磁束は、流れているわけではないがフラックスの一種である。

さらに、速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t)$ を Taylor 展開し書きかえる。1次元の場合は

$$v(x + v\Delta t, t + \Delta t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t + v \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t. \quad (1.9)$$

3次元の場合は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t, \quad (1.10)$$

または

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \Delta t.$$

よって、(1.10) 式を (1.8) 式に代入し、流体の加速度に対する次の表式を得る。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}. \quad (1.11)$$

右辺の加速度の表式は**オイラー形式**と呼ばれる。

(b) オイラー方程式

圧力が流体粒子におよぼす力を次に考える。連続の式と同じようにして体積 V に働く力を導く。外からの圧力 p によって微小表面 dS に働く力は $-p\mathbf{n} dS$ である。よって、体積 V の全表面に働く圧力による合力は

$$-\oint_S p\mathbf{n} dS = -\int_V \nabla p dV. \quad (1.12)$$

問題 1. ガウスの発散定理を用いて (1.12) 式を導出せよ。

以上より運動方程式を書き下すことができる。体積 V について運動量保存を考えよう。圧力以外の力は働いてないとする。また、ここでは V の表面 S は流体とともに動いて体積 V からの流体の出入りはないものとする。このとき、体積 V についての運動量保存は次のように表される。

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = -\int_V \nabla p dV. \quad (1.13)$$

よって、最終的に流体力学における運動方程式、いわゆる**オイラー方程式**が次のように得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad \text{または} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.14)$$

オイラー方程式は速度の時間発展を記述する。また圧力以外にも（重力等のように）流体単位質量に対する外力 \mathbf{f} が働いているような場合には、右辺にそれを加えればよい

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.15)$$

(c) オイラー方程式の保存形 (運動量保存の式)

- 単位体積当たりの運動量 $\rho \mathbf{v}$ の時間変化は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p. \quad (1.16)$$

2つめの等号で連続の式 (1.5) とオイラー方程式 (1.14) を用いた. この式をベクトル \mathbf{v} の成分 v_i を使った形式で書き下そう. 添字 i は 1, 2, 3 のいずれかであり, それぞれ x, y, z 成分を示している. この形式で (1.16) 式は次のように書くことができる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) - \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1.17)$$

ここで, 添字 j も 1, 2, 3 をとる. 上式のように, 同じ添字のついた成分の積 $A_j B_j$ はベクトルの内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ を表し, 1 から 3 までの和をとるものとする (和の規約).

- (1.17) 式は, 結局次の形に書ける (オイラー方程式の保存形)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} = 0. \quad (1.18)$$

ここで, テンソル Π_{ij} はクロネッカーのデルタ δ_{ij} (単位行列) を用いて

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij} p + \rho v_i v_j \quad (1.19)$$

と与えられ, **運動量流束密度テンソル** と呼ばれる. このテンソルの第 1 項は圧力が面に働くことで生じるその面を横切る運動量の流れを表し, 第 2 項は流体が直接面を横切ることによる運動量の流れを表している.

- (1.18) 式を固定した表面 S をもつ一定体積 V で積分すると, **運動量保存の式**

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV = - \oint_S \Pi_{ij} n_j dS \quad (1.20)$$

を得る. 右辺は表面 S から流れ出る運動量の総量を表している. これより, テンソル Π_{ij} は基底ベクトル \mathbf{e}_j に垂直な面を横切る運動量 i 成分の流れを表している.

問題 2. (1.13) 式で用いた流体の流れとともに変形する体積 V に対して

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV \quad (1.21)$$

が成り立つかどうかを明らかにせよ.

(ヒント: 体積で積分する代わりに, 微小質量要素 $dM = \rho dV$ の足し合わせで考えてみる.)

(d) オイラー方程式に関する補足説明

- 実在の流体においては粘性の効果が重要な場合があるが、オイラー方程式では粘性の効果は考慮されていない。粘性が重要でない流体は**理想流体**と呼ばれる。宇宙における多くの流体運動では理想流体の近似がよく成り立っている。粘性を効果を考慮した運動方程式はナビエ-ストークス方程式と呼ばれる。
- **境界条件**： 流体中に物体がある場合にはその表面（境界）での条件が必要となる。理想流体では、流体が物体内部に入り込まないことが要請される。すなわち、物体表面での境界条件は

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (1.22)$$

となる。 \mathbf{n} は表面の法線ベクトルで、 \mathbf{u} は物体（表面）の速度である。理想流体では境界面の接線方向の速度は流体と物体の間で異なってもよい。

1.4 断熱の式

- 独立な熱力学量は2つある（例えば、圧力と密度）。したがって、連続の式の他に熱力学量の時間進化を決める方程式がもう1つ必要である。理想流体では、エントロピーの不変（断熱）が通常仮定される。すなわち「各流体粒子」に対し単位質量当たりのエントロピー s は不変とする。これはラグランジュ微分を用いて

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (1.23)$$

と表される。これが**断熱の式**である²。

- より単純な場合として、ある時刻に「流体全域」でエントロピーが一定である場合もよく設定される。この場合、断熱の式によりその後もエントロピー一定が保たれる。

$$s = \text{const.} \quad (1.24)$$

このような流れは**等エントロピー運動**と呼ばれる。

- 理想気体の断熱過程においては各流体粒子に対し関係式

$$p = K\rho^\gamma \quad (1.25)$$

が成り立つ。 $\gamma = c_p/c_v$ は比熱比であり、比例定数 K の値は各流体粒子のエントロピー s で決まる。等エントロピー運動では、 K も流体全体で一定となる。気体の等エントロピー運動ではこの関係式がよく用いられる。輻射輸送等による加熱や冷却がある場合には、断熱の式やエントロピー一定（または(1.25)式）は成り立たない。そのような場合でも、比熱比と別の定数 γ を用いて(1.25)式を近似的に使うことがある（**ポリトロプの関係式**）。

²この断熱の式と連続の式(1.5)より**エントロピー保存の式** $\partial(sp)/\partial t + \nabla \cdot (sp\mathbf{v}) = 0$ も得られる。

- 等エントロピー運動において、単位質量当たりのエンタルピー h の微分は

$$dh = Tds + Vdp = \frac{1}{\rho} dp \quad (1.26)$$

となる。 $V = 1/\rho$ は比体積である。これより、等エントロピー運動においてオイラー方程式 (1.14) は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla h. \quad (1.27)$$

- 等エントロピー運動でない場合でも、例えばポリトロップの関係式 (1.25) のように圧力 p が密度 ρ だけの関数で書かれる場合には、 $h = \int (1/\rho) dp$ を導入することで (1.27) 式を満たすことができる。一般に p が ρ だけの関数である流体は**バロトロピック流体**と呼ばれる（そうでない場合は**バロクリニック流体**と呼ばれる）。

1.5 ベルヌーイの定理

- 時間に依存しない流れ（定常流）で、断熱の式が成り立つ場合について考える³。定常流では $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ 。これに加えてベクトル公式

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.28)$$

を用いると、オイラー方程式 (1.14) は

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (1.29)$$

となる。さらに、この両辺と速度の内積をとると、左辺第3項は速度に垂直なので

$$\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) = 0 \quad (1.30)$$

を得る。ここで、1つ目の等号では $dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp$ から得られる関係式 $\nabla h = T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p$ と定常流における断熱の式 $\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0$ を用いた。

- 流線について考える。流線は線上の各点で速度ベクトルと接している線である。定常流では流線は流体粒子の軌跡を表している。これより、(1.30) 式の左辺や中辺は流線に沿った変化を表している。それゆえ、流線に沿って

$$\frac{1}{2} v^2 + h = \text{const.} \quad (1.31)$$

という結論を得る。一般に、この定数は各流線で異なる。(1.31) 式は**ベルヌーイの式**と呼ばれる。ベルヌーイの式より、圧力下がるにつれ速度は増すことや、速度0の点で圧力が最大になることがわかる。

³圧力 p が密度 ρ だけの関数で書かれるバロトロピック流体においても、 $h = \int (1/\rho) dp$ を用いれば (1.27) 式を満たし、(1.30) 式やベルヌーイの式 (1.31) が導かれる。

- 重力場の中の流体に対しても同様な式を導くことができる。その場合、外力を含んだオイラー方程式 (1.15) を用いればよい。重力ポテンシャル ϕ_g を用いて単位質量当たりの外力は $\mathbf{f} = -\nabla\phi_g$ と書けるので、結局、重力場中でベルヌーイの式は次のようになる。

$$\frac{1}{2}v^2 + h + \phi_g = \text{const.} \quad (1.32)$$

問題 3. ベクトル公式 (1.28) を導出せよ。

1.6 エネルギー保存の式

- 流体の単位体積当たりのエネルギーは、運動エネルギーと内部エネルギーとの和 $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e$ で与えられる。 e は単位質量当たりの内部エネルギーである。この流体のエネルギーの時間変化を調べる。以下断熱の式は成り立っているものとする。
- まず、運動エネルギーの時間変化に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (1.33)$$

を得る。さらに、連続の式とオイラー方程式を用いて右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2}v^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) - \rho v_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &= -\frac{1}{2}v^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) - \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) + \rho v_i T \frac{\partial s}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.34)$$

となる。ここで、 $\frac{1}{\rho}\nabla p = -T\nabla s + \nabla h$ を用いた。

- 次に、内部エネルギーの時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) &= \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\rho v_i T \frac{\partial s}{\partial x_i} - h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \end{aligned} \quad (1.35)$$

となる。ここで、2つ目の等号では $de = Tds + (p/\rho^2)d\rho$ と $h = e + p/\rho$ を、3つ目の等号では断熱の式と連続の式を用いた。

- (1.34) と (1.35) 式を足し合わせると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e \right) = - \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) - \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) \quad (1.36)$$

となる。この右辺をまとめて、最終的に**エネルギー保存の式**を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e \right) + \text{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) \right] = 0. \quad (1.37)$$

divergence の中のベクトルは**エネルギー流束密度ベクトル**と呼ばれる。

- 定常流では、エネルギー保存の式 (1.37) (または [1.36] 式) と連続の式 (1.5) より、流線に囲まれた流管を横切る質量流束 ($\rho v_i dS_i$) とエネルギー流束はそれぞれ一定となる。これらの流束の比も一定であり、ベルヌーイの式 (1.31) を得ることができる。
- 補足説明
 - 外力 f が働いている場合は、(1.37) 式右辺は外力がする仕事率 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$ となる。
 - 輻射吸収・放射や化学反応等による (正負の) 加熱がある場合には (1.37) 式右辺にそれによる単位時間、単位体積当たりの加熱量の項を加える必要がある。また輻射等によるエネルギー輸送に関する式がここで導出したエネルギー保存の式とは別に必要。
- 一般に、流体力学方程式 (および他の物理の方程式) の保存形は次の形に表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{〇〇密度}) + \text{div} (\text{〇〇流束密度}) = 0. \quad (1.38)$$

問題 4. エネルギー保存の式 (1.37) 式を時間によらない外部重力場 $\phi_g(\mathbf{r})$ がある場合に拡張した式を導出し、エネルギー流束密度ベクトルの表式を求めよ。その際、外部重力場中の流体の単位体積当たりのエネルギーは $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + \rho\phi_g$ であることに注意せよ。

1.7 非圧縮性流体，ポテンシャル流

- **非圧縮性流体**では密度は一様 ($\rho = \text{const.}$)。非圧縮性流体の近似が成り立つための条件は、速度に対し $v \ll c_s$ である。さらに変動時間は $T \gg L/c_s$ のように長い必要がある。よって液体以外でも亜音速であれば気体に対しても有効な場合が多い。
- **非圧縮性流体の基礎方程式**

$$\text{連続の式} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.39)$$

$$\text{オイラー方程式} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (1.40)$$

- **非圧縮性流体のポテンシャル流**：速度があるポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ を用いて

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \quad (1.41)$$

と書ける流れは**ポテンシャル流**と呼ばれる。ポテンシャル流は渦なしの流れで

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (1.42)$$

である。流れを決める方程式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ より

$$\Delta \phi = 0 \quad (\text{ラプラス方程式}) \quad (1.43)$$

である。さらに、(1.40) 式はベクトル公式 (1.28) と渦なしであることから

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (1.44)$$

となり，次式を得る．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = C \quad (\text{定数}). \quad (1.45)$$

例題 「球のまわりの流れ」

非圧縮性理想流体の一樣流 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ (一定) の中に半径 R の球を静止した状態でおかれている．この球のまわりの流れをポテンシャル流とし，流れ場と圧力場を求める．

- 流れの方向に z 軸をもち原点が球中心にあるような球とともに動く座標系で考える．対称性より流れ (およびポテンシャル ϕ) は z 軸について軸対称となる．
- 境界条件は，球表面 $r = R$ では $v_r = 0$ ，または

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (r = R). \quad (1.46)$$

また十分遠方で流れは一樣流 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ のままであるので， $u = |\mathbf{u}|$ として

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = ur \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.47)$$

- 一般にラプラス方程式の軸対称解はルジャンドル多項式 P_l を用いて次式で与えられる

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (1.48)$$

系の形状と境界条件から， l の和は最初の 2 つのみを用いればよいと予想される．

$$\phi = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (1.49)$$

(ルジャンドル多項式は $P_0 = 1$ ， $P_1 = x$ ， $P_2 = (3x^2 - 1)/2$ ， ...)

- 各係数は境界条件で決まる．

- $r \rightarrow \infty$ での条件 (1.47) より $A_0 = 0$ ， $A_1 = u$ ．

- $r = R$ での条件 (1.46) より $\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{B_0}{R^2} + \left(u - \frac{2B_1}{R^3} \right) \cos \theta = 0$ ．

これがすべての θ で成り立つので， $B_0 = 0$ ， $B_1 = \frac{1}{2}R^3u$ を得る． よって

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right). \quad (1.50)$$

- ラプラス方程式の解の一意性より $l \geq 2$ に対し $A_l = B_l = 0$ ．

- 速度場
$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \frac{R^3}{2} \frac{\mathbf{u}r^2 - 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = \mathbf{u} + \frac{R^3}{2r^3} (\mathbf{u} - 3u \cos \theta \mathbf{e}_r). \quad (1.51)$$

球表面 $r = R$ では

$$\mathbf{v}(r = R, \theta) = -\frac{3}{2}u \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.52)$$

である．球の両極 $\theta = 0, \pi$ では $\mathbf{v} = 0$ であるよどみ点となっている．流線は図 2 に示した．

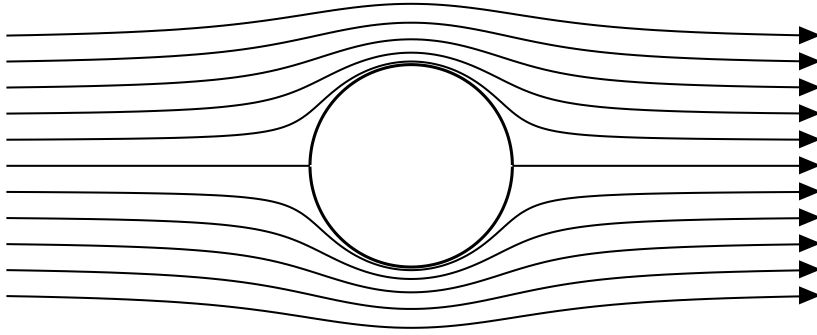


図 2: 球のまわりの流れ. 速度場から得られる流線を示した.

- 圧力は (1.45) 式から求まる. 定常流なので

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = C. \quad (1.53)$$

無限遠での圧力を p_0 とおくと, 定数 $C = \frac{1}{2}u^2 + p_0/\rho$ を得る. よって

$$p(r, \theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho [u^2 - v(r, \theta)^2]. \quad (1.54)$$

球表面 $r = R$ では

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right) \quad (1.55)$$

となり, よどみ点で圧力は最大となる. (1.55) 式より圧力は前後面 ($\theta \geq \pi/2$) で対称なので, 球が受ける抵抗力は 0 になる (ダランベールのパラドックス).

問題 5. (1.51), (1.52), (1.55) 式を導出せよ.

(余談) 現実の抵抗力を求めるには, 粘性を考慮する必要がある. その場合 $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ でもある. 球に働く抵抗力は $F = \frac{1}{2}C_D \pi R^2 \rho u^2$ と表され, 無次元数 C_D はナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1.56)$$

を解くことで求まる. ν は動粘性係数である. 例えば, 球のまわりの流れの場合

$$C_D = \begin{cases} 12\nu/(Ru) & (\text{粘性係数 } \nu \text{ が大きい場合. ストークス則}), \\ \sim 1 & (\text{粘性が弱い場合}). \end{cases} \quad (1.57)$$

1.8 Appendix 理想気体の熱力学

- 状態方程式

$$p = \frac{n_{mol}}{V}RT = nk_B T = \frac{\rho}{m}k_B T. \quad (1.58)$$

(n_{mol} : モル数, $R = k_B N_A$: モル気体定数, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ [J/K]: ボルツマン定数, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$: アボガドロ定数, n : 分子数密度, m : 1分子の質量)

- 比熱

- 単位質量当たりの定積比熱 $c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}. \quad (1.59)$

- 単位質量当たりの定圧比熱 $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}. \quad (1.60)$

ここで, $\gamma \equiv c_p/c_V$ で, $c_p - c_V = k_B/m$ (Mayer の関係式, 導出要確認) を用いた. 以下では, 比熱比 γ および比熱は定数とする.

- 音速 c_s

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (\text{断熱過程では } p \propto \rho^\gamma). \quad (1.61)$$

- 単位質量当たりの内部エネルギー e

$$e = c_V T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m} T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma - 1)}. \quad (1.62)$$

- 単位質量当たりのエンタルピー $h (= e + p/\rho)$

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1}. \quad (1.63)$$

- 単位質量当たりのエントロピー s

$$ds = \frac{1}{T} \left[de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = c_V d \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad (1.64)$$

より⁴

$$s = c_V \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + A, \quad \text{または} \quad p = A' e^{s/c_V} \rho^\gamma \quad (A, A': \text{定数}). \quad (1.65)$$

⁴(1.65) 式で, 無次元量でない p/ρ^γ が対数の引数となっていることを快く思わない人もいるであろう. ある標準状態 (p_0, ρ_0, s_0) からの差として $s - s_0 = c_V \ln[(p/p_0)/(\rho/\rho_0)^\gamma]$ と書けば問題はない. その場合 $A = s_0 - c_V \ln(p_0/\rho_0^\gamma)$.

2 圧縮性流体

2.1 音波

- 仮定

- 波の振幅は十分小さい
- 密度, 温度一様かつ静止したガス中での音波, 重力なし

- 摂動

圧力, 密度, 速度を次のように書く.

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1. \quad (2.1)$$

添字 1 のついた量は小さな**摂動量**であり, 音波を表す. 添字 0 のついた量はその背景の非摂動状態を表し, 今の場合定数とする. 音波では, 多くの場合, 変動時間 (振動周期) は熱が出入りする時間に比べ十分短いので, 変動は断熱的に起こると仮定できる. よって, $s_1 = 0$. このとき, 摂動量 p_1 と ρ_1 の間には次式が成り立つ.

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_1. \quad (2.2)$$

係数 $(\partial p / \partial \rho)_s$ は次のように表される.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c_s^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{k_B T_0}{m}. \quad (2.3)$$

ここで, c_s は (断熱) 音速と呼ばれ, 2 つめ以降の等号は理想気体に対し成り立つ.

- 音波の波動方程式

摂動量に関する方程式を求める. 連続の式とオイラー方程式それぞれに (2.1) 式を代入し, 小さな摂動の 2 次以上の項を無視すると次の 2 式を得る.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} p_1 = 0. \quad (2.5)$$

(2.4) 式の時間微分に (2.5) 式を代入し \mathbf{v}_1 を消去し, (2.2), (2.3) 式を用いて p_1 を消去すると

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \rho_1 = 0 \quad (2.6)$$

を得る. これは伝播速度 c_s の波動方程式であり, 音波を記述する方程式である.

- 進行平面波の解は一般に次のように書ける.

$$\rho_1 = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (2.7)$$

平面波は \mathbf{k} の方向に伝播し, $\omega = c_s |\mathbf{k}|$ である. 速度の摂動については (2.5) と (2.2) 式より

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} c_s \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.8)$$

を得る. 速度が伝播方向を向いているので, 音波は**縦波**である. 特に, 正弦波

$$\rho_1 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.9)$$

の場合は, \mathbf{k} は**波数ベクトル**で, ω は**角振動数**である. 任意の波は, 様々な \mathbf{k} を持つ正弦波の重ね合わせで表される.

問題 6. (1.64) 式を導出せよ. また, 温度 100K の HI 星間ガスの音速を求めよ.

2.2 有限振幅の波：単純波，希薄波，リーマン不変量

有限振幅の平面波を考える. ここでは, 等エントロピー運動を仮定する ($dp = c_s^2 d\rho$). また空間一次元 (x 方向) の問題とすると, 連続の式とオイラー方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2.11)$$

(a) 単純波

- さらに, 密度が $\rho = \rho(v)$ と書ける場合を考える. そのような波は**単純波**と呼ばれる. このとき, 連続の式 (2.10) は

$$\frac{d\rho}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v \frac{d\rho}{dv} + \rho \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

と変形でき, この両辺を $(d\rho/dv)$ で割ると, v の時間発展を記述する次式を得る.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho / \left(\frac{d\rho}{dv} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

同様にして, オイラー方程式 (2.11) は, 次のように変形される.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

(2.13) と (2.14) 式の 2 つの微分方程式は等しいはずなので

$$\frac{d\rho}{dv} = \frac{\rho}{c_s}, \quad \text{または} \quad \frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c_s} \quad (2.15)$$

である. (2.15) 式から速度 v と密度 ρ の関係が決まる. 実際, 積分して次式を得る.

$$v = \pm \int \frac{c_s}{\rho} d\rho. \quad (2.16)$$

音速 c_s は (等エントロピー運動なので) 密度のみの関数であることに注意しよう.

- (2.15) を (2.14) 式に代入すると次式を得る.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

密度 ρ も同様な式を満たすことは明らかである.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

これらの偏微分方程式より

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c_s \quad (2.19)$$

で与えられる $x-t$ 平面上の線 C_{\pm} (の片方) に沿って, 速度 v と密度 ρ は共に一定なことがわかる (断熱の式と比較せよ). この線は**特性曲線**と呼ばれる. 単純波において, 対応する特性曲線上で (2.19) 式右辺は一定なので, その特性曲線 C_{\pm} は直線となる. 時刻 t_0 に ρ と v が x の関数として与えられている場合, 各点 (t_0, x) を通る特性曲線を常微分方程式 (2.19) より求めれば, (特性曲線に沿って ρ と v は一定なので) 任意の時間における ρ と v の x 分布を得ることができる. この方法は特性曲線による偏微分方程式の解法として知られている.

問題 7. 理想気体において, (2.16) 式は次のようになることを示せ.

$$v = \pm \frac{2}{\gamma - 1} (c_s - c_{s,0}). \quad (2.20)$$

但し, $c_{s,0}$ は静止した気体の音速で $\gamma > 1$ である. さらに, 特性曲線の傾き (2.19) は $(\gamma+1)v/2 \pm c_{s,0}$ であることと, $c_s < c_{s,0}$ である場合に速度の大きさ $|v|$ の上限が $2c_{s,0}/(\gamma-1)$ であることを示せ.

(b) 希薄波

単純波の具体例として, 理想気体中における**希薄波 (膨張波とも呼ぶ)**を考えよう.

問題設定: $x = 0$ に固体壁 (ピストン) があり, $x > 0$ の空間には静止した気体が満たされている. その密度や音速は一定で $\rho_0, c_{s,0}$ とする. このピストンを, 時刻 $t = 0$ に速度 $-V$ で x の負の方向に引き始めた (図 2.2 上). このピストンの運動によって気体中に希薄波が発生する. $t = 0$ に静止していた気体は (2.16) 式を満たすので, この流体運動は単純波となる. 簡単のため, ピストンを引き抜く速度は一定で V は正の定数とする.

解

- ピストンから十分離れた領域の気体は, ピストンが動き出した後しばらくは初期状態 ($v = 0, \rho = \rho_0$) のままである. 一方, 近い領域の気体はピストンに引かれ負の速度 ($v < 0$) を持つ. よって, $dv/dx > 0$ であり膨張運動なので, 密度は減少し $d\rho/dx > 0$ となる. このように v と ρ の勾配は同じ符号を持つので, (2.15)-(2.20) 式では正の符号が選ばれる. よって, 特性曲線 C_+ 上で v と ρ は一定であり, 特性曲線 C_+ は直線となる.

- ピストンの運動開始の情報は、 $x > 0$ の気体中を音速 $c_{s,0}$ で伝わる．よって、 $x-t$ 平面の原点を通る特性曲線 C_+

$$\frac{x}{t} = c_{s,0} \quad (2.21)$$

を境界線とし、これより遠くの領域 ($x/t > c_{s,0}$) で気体は静止したままで、近い領域 ($x/t < c_{s,0}$) の気体は $v < 0$ 、 $dv/dx > 0$ の膨張運動をする．後者が希薄波である．

- $x/t < c_{s,0}$ の領域での気体の速度を求めてみよう．原点 $x = t = 0$ を通る特性曲線 C_+ には (2.21) 式以外の傾きを持つものもある． $t = 0$ にピストンが突然動き出したので、付近の気体は急激な負の加速と膨張を経験し、気体の速度や密度、音速は $x = t = 0$ で不連続となる．その結果、原点 $x = t = 0$ を通る特性曲線 C_+ の傾き $v + c_s$ は $c_{s,0}$ 以下の様々な値をとる．問題 7. の結果を用いると $x/t < c_{s,0}$ で

$$\frac{x}{t} = \frac{\gamma + 1}{2}v + c_{s,0}, \quad \text{または} \quad v = -\frac{2}{\gamma + 1} \left(c_{s,0} - \frac{x}{t} \right). \quad (2.22)$$

を得る．これで希薄波の領域における速度分布 $v(x, t)$ が求まった．

- ピストンにより近い領域の気体の運動は、ピストンの速さによって次の 2 通りがある．
 - (i) V が上限速度 $2c_{s,0}/(\gamma - 1)$ より小さい場合には、 $v = -V$ である特性曲線 C_+

$$\frac{x}{t} = -\frac{\gamma + 1}{2}V + c_{s,0} \quad (2.23)$$

が希薄波のもう 1 つの端 (境界) となる．この特性曲線とピストンとの間の領域では、気体はピストンと同じ速度を持ち密度一定の一樣流となる．例として、 $V = c_{s,0}$ の場合に対する、各領域における特性曲線 C_+ を図 3 左に図示した．

- (ii) $V > 2c_{s,0}/(\gamma - 1)$ の場合は、ピストンの速さ V が気体の上限速度を越えている場合であり、このとき気体はピストンに追いつけず真空の領域が形成される．希薄波のもう 1 つの端は特性曲線 $x/t = -2c_{s,0}/(\gamma - 1)$ で与えられ、これとピストンとの間は真空となる．

問題 8. この希薄波とその両側の各領域の範囲を明示し、各領域で音速と密度を x と t の関数で書け．ピストンの速さが $2c_{s,0}/(\gamma - 1)$ より速い場合と遅い場合両方を考えること．

問題 9. 希薄波の領域に対し、特性曲線の方程式 (2.19) を解き、曲線 C_- の式を $x = f(t)$ の形に求めよ．また、流体粒子の道筋の方程式 $dx/dt = v$ を解いて、道筋の式を同様に求めよ．但し、上の 2 つの曲線は $t = t_0$ 、 $x = c_{s,0}t_0$ の点を通るようにせよ．

(余談) 図 3 の流れについてもう少し詳しく考えてみよう．図 3 の流れは、3 つの領域、1. 静止領域、2. 希薄波の領域、3. ピストンと共に運動する一樣流の領域からなる．領域 3 の特性曲線 C_+ は速度 $-V$ で等速運動するピストンから出ていて、領域 1 の C_+ は $t < 0$ の静止していたピストンから出ている．これらの間の領域 2 の特性曲線 C_+ は加速途中のピストンから出ていると考えられ、そのため希薄波内で速度は $-V < v < 0$ となる．各特性曲線 C_+ に沿って、ピストン運動の情報が気体へ伝えられ気体の速度・密度が決まる．希薄波の領域 2 の速度分布は、ピストンの (最終的な) 速度 $-V$ に依らない．これは、こ

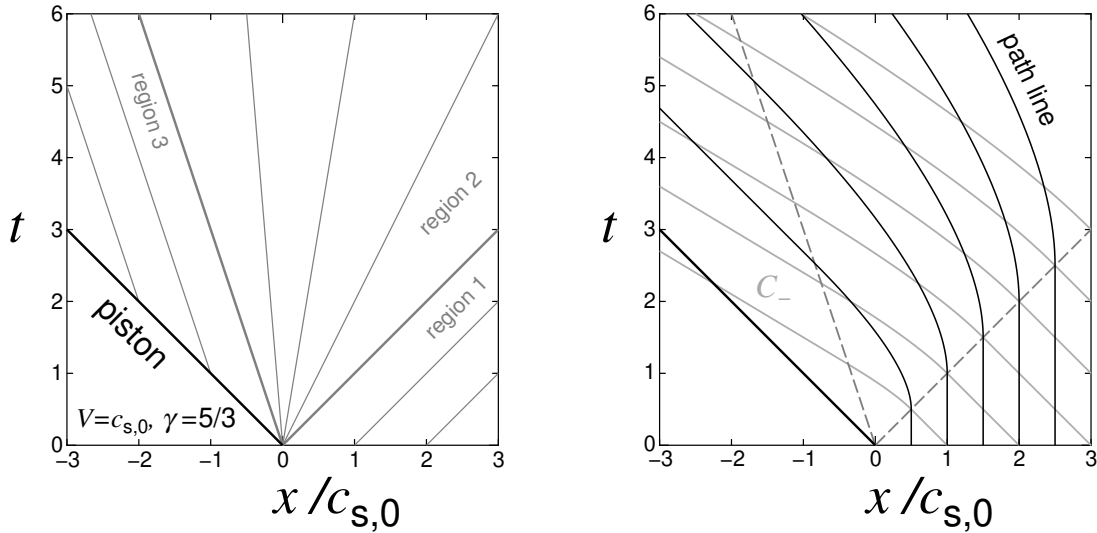
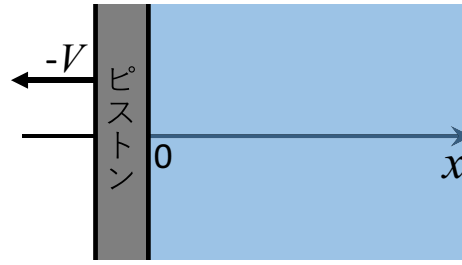


図 3: ピストンの引き抜きにより発生する希薄波. 模式図 (上) と特性曲線 C_+ (左下), 特性曲線 C_- , 流れの道筋 (右下). $V = c_{s,0}$, $\gamma = 5/3$. 左下図で, 特性曲線 C_+ は灰色の実線, ピストンの運動は黒の実線で示した. 灰色の太実線は希薄波の領域の両境界の C_+ を示す. 右下図では, 特性曲線 C_- を灰色の実線, 流体粒子の道筋を黒の実線で示した. 灰色点線は希薄波の領域の両境界を示す. 速度と密度が一定の領域で各線は直線となる.

の領域の気体にはピストンが加速中という情報が伝わっているだけで, 最終的な速度 $-V$ の情報は伝わらないからだ. 一方, 領域 3 には最終的な速度 $-V$ をもつピストンの情報が伝播しており, 気体はピストンと同じ速度で運動する.

図 3 右には, 同じ問題の流れの道筋と特性曲線 C_- を示した. 道筋と特性曲線 C_- は, 一様流である領域 1,3 では直線であるが, 希薄波の領域では曲線となる. 初め静止していた気体が, 希薄波の領域内で, 徐々に (負の速度に) 加速され, $-V$ に達している. また特性曲線 C_+ , C_- , 道筋の互いがなす角度は下流にいくと徐々に小さくなっている. これは希薄波内で密度と音速が減少し, 情報の伝播速度が遅くなるためである.

(c) リーマン不変量

v と ρ が独立である, より一般的な波の性質を調べる (但し, 等エントロピー運動とする). (2.11) 式に (2.10) 式 $\times c_s/\rho$ を加えたり, 引いたりすると

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{c_s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \pm c_s) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{c_s}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.24)$$

を得る。ここで、次式で定義される新たな2つの変数を導入する。

$$J_{\pm} = v \pm \int \frac{c_s}{\rho} d\rho. \quad (2.25)$$

これらを用いると、(2.24)式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_{\pm} = 0 \quad (2.26)$$

と簡単な形にかける。これより、 J_+ と J_- は、それぞれ C_+ と C_- の特性曲線に沿って一定であることがわかる。不変量 J_{\pm} はリーマン不変量と呼ばれる。それぞれの特性曲線に沿って情報が伝播することで、リーマン不変量 J_{\pm} が不変となっていると考えられる。

特に、理想気体でポリトロップの関係が成り立つ場合は、リーマン不変量は次式で与えられる。

$$J_{\pm} = v \pm \frac{2}{\gamma - 1} c_s. \quad (2.27)$$

偏微分方程式(2.26)は、単純波と同様に特性曲線を求めることで解くことができる。

問題 10. (2.26)式が成り立つことを示せ。

問題 11. (b)で調べた希薄波、及び、その両側の各領域に対し、リーマン不変量 J_{\pm} を求めよ。

(d) 衝撃波の発生

x の正の方向に伝播し下図のような密度分布をもつ波束を考える。単純波であるとする。特性曲線 C_+ に沿って密度と速度が一定になっている。その伝播速度は $v + c_s$ である。密度が高いところほど音速が速いため、密度が高い部分は他より速く進行する。その結果、密度が最大となる点が徐々にその前の密度の低いところを追い越していき、やがては、密度分布 $\rho(x)$ が多価になってしまう(図5の $t = 4\Delta$)。

実際には、多価になることは許されず、波の前面で密度の不連続がつくられる。ここで速度や圧力も不連続となる。この不連続面は衝撃波と呼ばれる。一般に、進行方向に密度が減少する分布をもつ波は減衰する前に十分な距離を伝播すれば衝撃波を発生させる。衝撃波については次節で詳しく説明する。

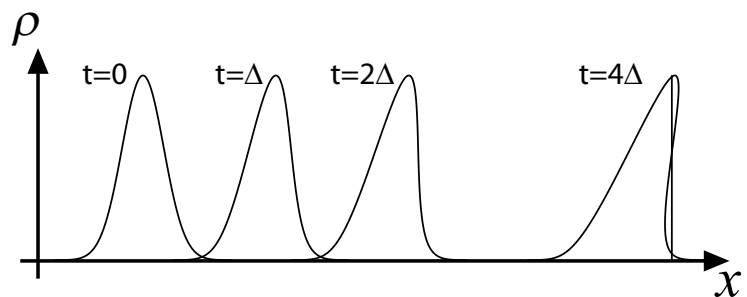
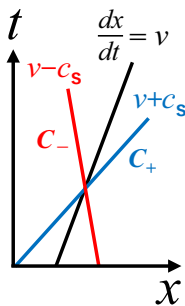


図 4: 特性曲線 C_{\pm} と流れの道筋。 図 5: 有限振幅の波束の伝搬と衝撃波の発生。

2.3 安定な不連続面：衝撃波と接触不連続

- 安定に存在する不連続面について考える．一般に不連続面は移動するが，ここでは不連続面が静止した座標系で考える．不連続面の法線方向を x 軸にとり，不連続面は $x = 0$ におく．負の x の領域を 1, 正の領域を 2 で番号付け，それぞれの領域の各量を添字 1, 2 をつけて表す．
- **安定な不連続面に対する条件:** 不連続面が安定に存在するためには，質量や，エネルギー，運動量の保存より，面を横切る質量流束，エネルギー流束，運動量流束 (3 成分) が連続である必要がある．各流束の表式は (1.5), (1.19), (1.37) 式であり，これらの連続性より以下の条件式を得る．

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j, \quad (2.28)$$

$$j[h_1 + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_{1,y}^2 + v_{1,z}^2)] = j[h_2 + \frac{1}{2}(v_2^2 + v_{2,y}^2 + v_{2,z}^2)], \quad (2.29)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (2.30)$$

$$jv_{1,y} = jv_{2,y}, \quad (2.31)$$

$$jv_{1,z} = jv_{2,z}. \quad (2.32)$$

ここで， v_1, v_2 は領域 1, 2 における速度の x 成分であり， j は質量流束密度の x 成分である．後でみるように，これらを満たさない不連続面は瞬時に複数の不連続や希薄波へ分裂する．

- 上の条件を満たす不連続は 2 つの種類に分類される．1 つめの不連続は， $j \neq 0$ の場合で**衝撃波**と呼ばれる．もう 1 つは $j = 0$ の場合で，**接線不連続**と呼ばれる．

(a) 衝撃波

- **衝撃波が静止した座標系**

(2.31), (2.32) 式の両辺を 0 でない質量流束密度 j で割ると， v_y と v_z が連続であることがわかる．以下では $v_{y,i} = v_{z,i} = 0$ となる座標系を用いて衝撃波を調べる．また， $v_1, v_2 > 0$ ($j > 0$) となるように x 軸の方向を決める．このとき， $x < 0$ の領域 1 は上流であり**衝撃波前面**と呼ばれ， $x > 0$ の領域 2 は下流で**衝撃波後面**と呼ばれる．

- **衝撃波の関係式**

(2.30) 式より

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (2.33)$$

ここで，比体積 V_i は $1/\rho_i$ である．右辺が熱力学量で書かれており，座標系に依らない式である．また (2.33) 式から， $p_2 > p_1$ かつ $V_1 > V_2$ または $p_2 < p_1$ かつ $V_1 < V_2$

のどちらかであることがわかる。後でみるように、エントロピー増大の法則から、常に前者が実現されることが示される。すなわち、圧力や密度は衝撃波前面よりも後面で高くなる。

また、次の座標系に依らない関係式も得られる。(2.28),(2.33)式より

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = j^2(V_1 - V_2)^2 = (p_2 - p_1)(V_1 - V_2). \quad (2.34)$$

となる。(2.29)式は、(2.33)式と $v_{y,i} = v_{z,i} = 0$ を用いて

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}j^2(V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1), \quad (2.35)$$

となり、さらに、 $h = e + pV$ より次式も得る。

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2). \quad (2.36)$$

● 衝撃波断熱曲線

一般に、単位質量当たりのエンタルピー（または内部エネルギー）は物質の状態方程式を用いて圧力と密度の関数として表すことが可能だ。これらの状態方程式と(2.35)式(または(2.36)式)を連立させれば、与えられた衝撃波前面での p_1, V_1 に対し後面の p_2 を V_2 の関数として表すことができる。この p - V 平面における関係は**衝撃波断熱曲線**、または**ランキン-ユゴニオの断熱曲線**と呼ばれる。

この関係式より、後面で1つの熱力学量が決めれば他の熱力学量もすべて決定される。さらに、(2.33),(2.34)式を用いれば j や v_2, v_1 も決まる。(衝撃波前面の流体に対する衝撃波の伝播速度は $-v_1$ に等しい。) すなわち、衝撃波の自由度は1である。

(b) 接線不連続

この場合圧力は連続である。一方、 v_y, v_z に対しては不連続を許す。しかし、接線方向の速度が不連続な面は、流体力学的な不安定性のために安定ではなく、比較的短時間でこの不連続面は崩れる。したがって、安定な接線不連続は接線速度成分が連続な場合に限られる。そのような接線不連続は**接触不連続**と呼ばれる。接触不連続では圧力以外の熱力学量が不連続となる。流体物質の組成の不連続もありうる。接触不連続面は流体に対し静止しており、流体運動とともに移動する。

2.4 理想気体における衝撃波

- **理想気体の衝撃波断熱曲線**を求める。理想気体では、 $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}pV$ である。これを(2.35)式に代入し、両辺を h_1 で割ると

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{V_2}{V_1} + 1 \right) \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \quad (2.37)$$

となり、さらに変形して

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Ap_2/p_1 + 1}{p_2/p_1 + A} \quad \left(= \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2}{v_1} \right) \quad (2.38)$$

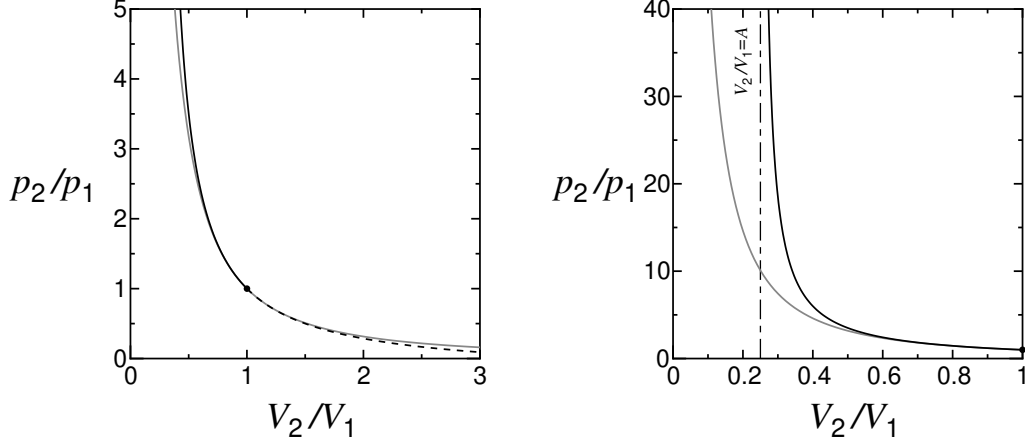


図 6: $\gamma = 5/3$ の理想気体の衝撃波断熱曲線 (黒線) とポアソン断熱曲線 (灰色線). $V_2 < V_1$ では, エントロピーの増加により衝撃波断熱曲線はポアソン断熱曲線の上にくる.

を得る. ここで, 定数 A は

$$A \equiv \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (< 1). \quad (2.39)$$

(2.38) 式は p_2 と V_2 (または ρ_2) との関係, すなわち衝撃波断熱曲線を与える (図 6 参照). 強い衝撃波の極限 ($p_2/p_1 \rightarrow \infty$) で, 比体積は $V_2/V_1 = A$ までしか減少しない. また次の関係式も得る.

$$\frac{V_2}{V_1} - 1 = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{p_2/p_1 - 1}{p_2/p_1 + A}. \quad (2.40)$$

(2.40) 式を用いて, j や $v_1 - v_2$, 領域 1 でのマッハ数 M_1 を p_2 の関数で書くことができる.

$$j^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} + A \right) \frac{p_1}{V_1}, \quad (2.41)$$

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = \frac{2}{\gamma(\gamma + 1)(p_2/p_1 + A)} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)^2 c_{s,1}^2, \quad (2.42)$$

$$M_1^2 \equiv \frac{v_1^2}{c_{s,1}^2} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} + A \right). \quad (2.43)$$

これより, $p_2 > p_1$ では $M_1 > 1$ であり, 衝撃波前面で法線方向速度は常に超音速であることがわかる. (逆に領域 1 の流体からみれば, 衝撃波は超音速で伝播する.) また, p_2 や V_2 をマッハ数 M_1 で表すこともできる.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - A, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^{-2} + A. \quad (2.44)$$

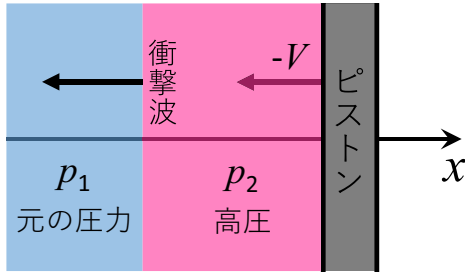


図 7: ピストンで発生した衝撃波.

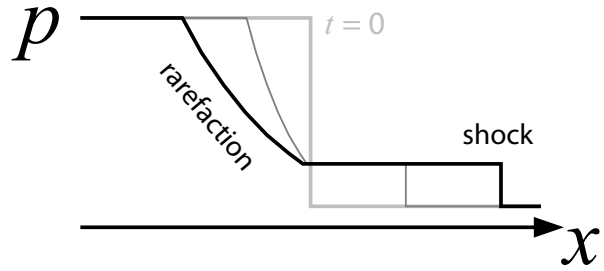


図 8: Sod の問題の圧力分布の解.

● 衝撃波によるエントロピー増加

衝撃波前後でのエントロピー変化は, (1.65), (2.38) 式より

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \right] = c_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{Ap_2/p_1 + 1}{p_2/p_1 + A} \right)^\gamma \right]. \quad (2.45)$$

これを p_2 で微分すると

$$\frac{ds_2}{dp_2} = \frac{c_V A (p_2 - p_1)^2}{p_2 (Ap_2 + p_1)(p_2 + Ap_1)} \quad (2.46)$$

となり, 常に正または 0 である. 衝撃波によりエントロピーは増加しなければならないので, $p_2 > p_1$ であることがわかる. また, 弱い衝撃波でのエントロピー増加は次で与えられる.

$$s_2 - s_1 = \frac{c_V A}{3(1+A)^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right)^3 \quad (\text{for } p_2 - p_1 \ll p_1). \quad (2.47)$$

● ピストンによる衝撃波の発生と伝播

§2.2 では, ピストンを速度 $-V$ で引いた場合 $x > 0$ の領域に希薄波が発生することをみた. 逆に, 速度 $-V$ のピストンによって押された $x < 0$ の流体には衝撃波が発生する (図 7). 衝撃波が未到達な衝撃波前面の領域 1 の流体は静止しており, 衝撃波後面の領域 2 はピストンとともに速度 $-V$ で運動するので, $v_1 - v_2 = V$ である. この速度 V に対し, (2.42) 式から圧力比 p_2/p_1 が求まる. また, 衝撃波前面が静止した座標系における衝撃波伝播速度の大きさは, 衝撃波静止系での前面の速度の大きさに等しいので (2.43) 式から求まる.

問題 12. (2.38), (2.42), (2.43) 式を導出せよ.

問題 13. $M_1 > 1$ を確認せよ. また衝撃波後面でのマッハ数 $M_2 (= v_2/c_{s,2})$ は 1 より小さいことも示せ.

2.5 初期不連続の時間発展：リーマン問題

● リーマン問題

初期条件として、任意の不連続面が設定された場合を考える。安定な不連続面のための条件 (2.28)-(2.30) を満たさない場合には、希薄波や衝撃波、接線不連続などの安定な不連続面が新たに生まれ、これらが伝播する。理想気体の初期不連続に対しこれら不連続面の生成と伝播を解く問題はリーマン問題と呼ばれる。

● 速度不連続のないリーマン問題

初期条件において、不連続面の両側で流体は静止していて速度の不連続のない、リーマン問題の特別な場合を考えよう。初期 $t = 0$ で、 $x = 0$ に不連続面があり、両側の(一定な)圧力と密度は、 $x > 0$ で p_1, ρ_1 と、 $x < 0$ では p_2, ρ_2 とおき、 $p_2 > p_1$ とする⁵。この初期不連続のその後 ($t > 0$) における時間発展を解く。

- この初期条件によって、圧力の高い $x < 0$ の領域から圧力の低い $x > 0$ の領域へ正の速度をもつ流れが生じる。その結果、 $x < 0$ の領域では $dv/dx > 0$ で希薄波が発生し、 $x > 0$ の領域には衝撃波が伝播する (図 8)。希薄波と衝撃波の間の領域では、圧力と速度は一定となる。それらの値を p_3, v_3 とおく。(この領域を 3 とする。)
- この希薄波では、 $d\rho/dv < 0$ であり、(2.15)-(2.20) 式で負の符号が選ばれる。(2.21) と (2.23) 式を参考にして、希薄波の両端は 2 つの特性曲線 C_{-}

$$\frac{x}{t} = -c_{s,2} \quad \text{および} \quad \frac{x}{t} = \frac{\gamma+1}{2}v_3 - c_{s,2} \quad (2.48)$$

で与えられる。今衝撃波前面が静止しているため、衝撃波が伝播する速さは前節の " v_1 " で与えられる。(2.43) 式より、衝撃波面の位置は次式で与えられる。

$$\frac{x}{t} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_3}{p_1} + A \right)} c_{s,1}. \quad (2.49)$$

- 3 の領域には、初期の不連続面で接していた流体同士の境界があり、これは接触不連続面である。一般に、この不連続面の両側でエントロピー (と密度、温度) が異なっている。接触不連続面の位置は $x/t = v_3$ で与えられる。
- v_3 と p_3 の決定: 速度 v_3 は希薄波における関係式 (2.20) より次式を満たす。

$$v_3 = \frac{2}{\gamma-1}(c_{s,2} - c_{s,3}) = \frac{2c_{s,2}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] \quad (2.50)$$

最後の等号ではエントロピー一定での音速と圧力の関係を用いた。一方、衝撃波からみると v_3 は前後面の速度差でもあり、それは (2.42) 式で与えられる。

⁵領域 1,2 の配置が §2.3 の場合と左右逆であるため符号が異なることに注意すること。

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma+1)(p_3/p_1 + A)} \left(\frac{p_3}{p_1} - 1\right)} c_{s,1}. \quad (2.51)$$

これら2つの表式が等しいとした方程式より、 p_3 と v_3 が決まる。

- よく知られた **Sod の問題**は、上記で $p_2/p_1 = 10$, $\rho_2/\rho_1 = 8$ の場合である。このとき、 $\gamma = 1.4$ として上の方程式を解くと $p_3/p_1 = 3.03130$ を得る。 ($c_{s,2}^2/c_{s,1}^2 = p_2/\rho_2/(p_1/\rho_1)$ に注意。) Sod の問題は、圧縮性流体数値計算コードのテスト問題として用いられる。

問題 14. Sod の問題において圧力比 p_3/p_1 が上記の値をとることを確認し、速度比 $v_3/c_{s,1}$ も求めよ。また、接触不連続の両側で x が大きい側の密度を ρ_3 , x が小さい側の密度を ρ'_3 としたとき、密度比 ρ_3/ρ_1 , ρ'_3/ρ_1 をそれぞれ求めよ。

● 速度不連続がある一般のリーマン問題

一般のリーマン問題は、両領域間の速度差から以下の6通りに分類することができる。これらすべての場合で、初期の不連続面で接していた流体間に接触不連続が形成される。まず、圧縮の速度場の場合 ($v_2 > v_1$) から考えよう。領域1,2の配置は上の問題と同じとする。

- (i) 速度差の大きさ $v_2 - v_1$ が衝撃波の値、(2.42) 式と一致する場合、初期不連続はそのまま1つの衝撃波として低圧側の流体の領域を伝播する。
- (ii) $v_2 - v_1$ が (2.42) 式右辺より小さい場合は、膨張運動が加わったことに対応するので、衝撃波と希薄波が発生しそれぞれ低圧側、高圧側を伝播する。それらの配置や伝播は上の速度不連続のない問題と定性的に同じである。(2.50) と (2.51) 式の左辺をそれぞれ速度 v_2, v_1 との差に変更することで、上の問題と同様に解くことができる。
- (iii) $v_2 - v_1$ が (2.42) 式右辺より大きい場合は、圧縮が強いために2つの衝撃波が発生し、両側に伝播する。衝撃波の間は高圧な領域であり、そこで圧力と速度は一定である。2つの衝撃波における速度差に対して (2.51) 式と同様な条件がそれぞれ成立し、それらより問題を解くことができる。2つの物体が衝突したときは通常この場合が実現される。

以下は、膨張の速度場の場合 ($v_2 < v_1$) である。

- (iv) 膨張する速度差の大きさ $v_1 - v_2$ が希薄波両端の速度差 ((2.50) 式) に一致する場合は、初期不連続は1つの連続的な希薄波になり高圧側へ伝播する。
- (v) 速度差の大きさが希薄波の値より小さい場合は、速度不連続のない場合や (ii) の場合と同じで衝撃波と希薄波が発生し伝播する。(ii) の場合と同様に解くことができる。
- (vi) 速度差の大きさが希薄波の値より大きい場合には、2つの希薄波が発生し両側に伝播する。希薄波の間は、圧力・速度一定の低圧領域である。2つの希薄波の両端の速度差に対して (2.50) 式と同様な条件がそれぞれ成立し、それらより問題を解くことができる。

問題 15. 初期に速度不連続のみがある場合のリーマン問題において圧力分布 $p(x, t)$ を任意の速度差に対して求めよ. その際圧縮の速度場と膨張の速度場とで場合分けし, $v_1 = -v_2$ とせよ.

2.6 定常流における超音速への遷移

- 等エントロピーの気体の定常流を考える. ここでは, 重力は効かないものとする. 等エントロピー定常流では, ベルヌーイの式 (1.31) が成り立つので, 速度は次式を満たす.

$$v^2 = 2(h_0 - h) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{2}{\gamma - 1} (c_{s,0}^2 - c_s^2). \quad (2.52)$$

ここで, 添字 0 のついた各熱力学量は $v = 0$ でのそれぞれの値を表している. この式より, 圧力や密度, 音速等が減少するにつれて流体は加速することがわかる. 加速が継続すれば, やがて速度は音速を越え, 超音速流となる. マッハ数 $M = v/c_s = 1$ となる点は**臨界点**と呼ばれる. またそこでの音速は**臨界速度**と呼ばれ

$$c_{s,*} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c_{s,0} \quad (2.53)$$

と与えられる. (2.52) 式より, 熱力学量を速度の関数として書くこともできる.

$$\left(\frac{c_s}{c_{s,0}} \right)^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v}{c_{s,0}} \right)^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{v}{c_{s,*}} \right)^2. \quad (2.54)$$

- **超音速へ遷移する流れの質量流束密度**

質量流束密度の大きさ $j = \rho v$ は (2.54) 式を用いれば速度の関数として表すことができる (図 9 左). それより, j は音速を越える点で最大値をとることがわかる. これは, 定常のオイラー方程式 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad} p$ から, 一般的に示すことができる. このオイラー方程式から流線に沿った dp/dv が求まり

$$\frac{d\rho}{dv} = \frac{dp}{dv} / \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = -\frac{\rho v}{c_s^2} \quad (2.55)$$

を得る. よって dj/dv は

$$\frac{dj}{dv} = \rho + v \frac{d\rho}{dv} = \rho \left[1 - \left(\frac{v}{c_s} \right)^2 \right] \quad (2.56)$$

となる. この式より, j は亜音速では単調に増加して, $v = c_{s,*}$ で最大値 $j_* = \rho_* c_{s,*}$ をとり超音速では単調に減少することがわかる (図 9 左). 添字 * は臨界点での各量を表す.

● ラバール管の中の流れ

- 流速を増大させて超音速の定常流をつくるためには、速度増加とともに、 j を上記のように変化させる必要がある。どうすればそれを実現することができるのかを考えよう。
- 管の中の定常流を考える。その管の断面積 S は管に沿った x 軸ともに変化しているものとする (図9右)。また、管の中の流れは1次元的で x のみに依存しているとする。このとき、管の各断面を横切る質量流束は等しい。すなわち

$$S j = \text{const.} \quad (2.57)$$

これより

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = -\frac{1}{j} \frac{dj}{dx} = \left[\left(\frac{v}{c_s} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \quad (2.58)$$

を得る。2つめの等号では (2.56) 式を用いた。この式より管内の速度が決まる。

- これより、 S が一定の管では、管内で j や v も一定である。先が細くなる管 ($dS/dx < 0$) であれば、 j は増加し、亜音速の範囲で加速するが超音速には至らない。よって、音速を超える流れをつくるには、図9右のような管の途中で断面積が最小値 S_{\min} をとる管を用いる必要があることがわかる。 S_{\min} となるところで速度が音速と等しくなれば、その先において j が減少するので超音速でも加速し続けることができるのである。このような形状をもつ管は **ラバール管** (またはラバールノズル) と呼ばれる。
- ラバール管を用いた超音速ガスの噴出機構はロケットエンジンの噴出口に応用されている。宇宙における恒星風等の超音速流への加速を考えると、ラバール管での臨界点を越える流れがその理解に役立つ。

問題 16. (2.58) 式より、臨界点で dv/dx は $\sqrt{d^2S/dx^2}$ に比例することがわかる。その比例係数を求めよ。(ヒント) $0/0$ はロピタルの定理を用いる。 c_s が x に依存することにも注意せよ。

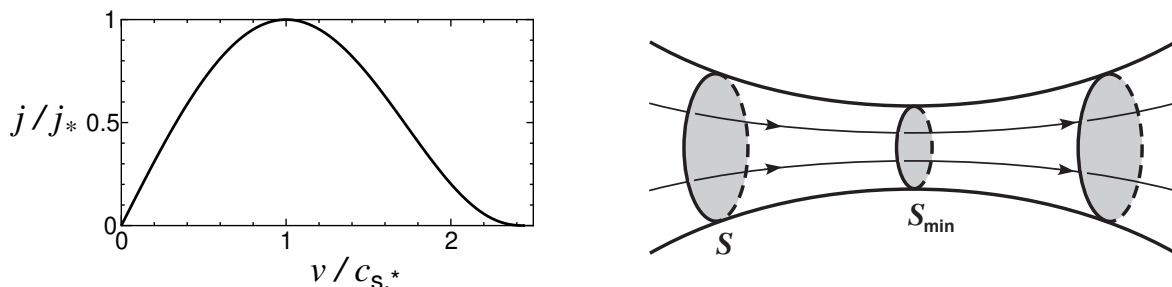


図9: 左: $\gamma = 1.4$ の気体における j と v の関係。右: ラバール管の中の流れ。

3 流体の不安定性

3.1 静水圧平衡

- まず、重力場の中における静止した流体の構造について簡単に述べておこう。静止した流体 ($v = 0$) において、重力を含めたオイラー方程式は次のように書ける。

$$-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p - \mathbf{grad} \phi = 0. \quad (3.1)$$

ここで、 ϕ は重力ポテンシャルであり、ポアソン方程式

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \quad (3.2)$$

により決まる。(3.1) 式は静水圧方程式と呼ばれる。

- 一様重力場は、通常は重力の方向を $-z$ 方向にとり $-\mathbf{grad} \phi = -g\mathbf{e}_z$ と書かれる。この場合静水圧方程式は次式になる。

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho. \quad (3.3)$$

- 球対称な密度分布 $\rho = \rho(r)$ をもつ天体の自己重力場は

$$-\mathbf{grad} \phi = -\frac{GM(r)\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.4)$$

である。ここで、 $M(r)$ は r より内側にある質量であり次式で与えられる。

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr. \quad (3.5)$$

よって、球対称自己重力天体の静水圧方程式は次のようになる。

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}. \quad (3.6)$$

恒星などの球対称天体の内部構造を調べるときには、この式が用いられる。

- 内部で完全に静止してている構造だけでなく、音速に比べ十分遅い対流運動がある場合にもこれらの静水圧方程式は近似的に有効である。
- 静水圧構造の決定のためには、物質の状態方程式と温度分布を決めるエネルギー方程式 (or 断熱の式) も必要である。エネルギー方程式では輻射や対流運動による熱輸送が考慮される。
- 上では静水圧方程式として重力方向の成分について主に述べた。他の方向の成分より、重力に垂直な面上で (または重力の等ポテンシャル面上で) 圧力や密度が一定であることがわかる。状態方程式から温度もこの面で一定となる。これも静水圧平衡の重要な性質である。

問題 17. 球対称自己重力場の式 (3.4) をポアソン方程式 (3.2) から導出せよ。

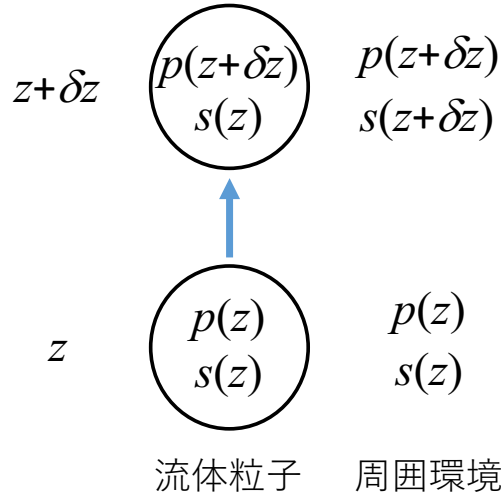


図 10: 上へ移動した流体粒子と周囲の関係.

3.2 対流不安定性

- 静水圧平衡や定常流など力の釣り合った力学平衡の状態は必ずしも安定な状態であるとは限らない. 一般にある条件が満たされた場合のみ安定となる. 平衡状態の安定, 不安定を決める条件について考えよう. 静水圧平衡が不安定である場合は流れが自発的に生じる. 例えば**対流**が起こる. 以下では, 対流が起きないための条件を導く.
- 一様重力場内の静水圧構造において, 圧力 p とエントロピー s は静水圧方程式とエネルギー方程式から z の関数として決まっている. ある高さ z にある流体粒子が比体積 $V(p(z), s(z))$ をもっているとする. この流体粒子が微小長さ δz だけ上に断熱的に移動したとしよう. 移動後の比体積は $V(p(z + \delta z), s(z))$ となる. 断熱過程のためエントロピーは保存されるが圧力は周囲と速やかに等しくなるからだ. 移動した流体粒子が高さ $z + \delta z$ の周囲の流体より高い密度をもち, もとの高さ z へ押し戻す力が働くような場合は, 対流は起こらず安定な静水圧平衡であると言える. 比体積が小さければ密度は高くなるので, 安定のための条件は

$$V(p(z + \delta z), s(z + \delta z)) - V(p(z + \delta z), s(z)) > 0 \quad (3.7)$$

となる. 上式左辺第 1 項は周囲に前からいる流体粒子の比体積である. この第 1 項を, $s' - s = \delta z ds/dz$ で展開すると, 条件式は

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \quad (3.8)$$

と変形できる. 変位 δz が負の場合も同じ条件が得られる. 熱力学の公式より

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{m}{k_B} V \quad (3.9)$$

となる。2つめの等号は理想気体で成り立つ。 $(\partial V/\partial s)_p$ は理想気体で常に正であり、他の多くの物質も加熱により膨張するので $((\partial V/\partial T)_p > 0$ なので) 正となる。よって、対流が起こらないための条件は以下のようになる。⁶

$$\frac{ds}{dz} > 0. \quad (3.10)$$

- 条件 (3.10) は温度勾配に対する条件に変形できる。マックスウェルの関係式などの熱力学公式を用いて

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} \quad (3.11)$$

と変形できるので、さらに静水圧方程式 (3.3) を用いると、条件 (3.10) は

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.12)$$

と表される。これより、温度勾配 dT/dz が正であれば常に安定である。温度勾配が負でも、その絶対値が $(gT/c_p V)(\partial V/\partial T)_p$ より小さければ安定である。この勾配のしきい値は**断熱温度勾配**と呼ばれる。理想気体の断熱温度勾配は g/c_p となる。

- 上記の流体粒子の移動に伴う復元力を求めておこう。密度変化によって流体粒子に働く力は**浮力**である。単位体積当たりの浮力は、まわりとの密度差 $\delta\rho$ を用いて次式で与えられる。

$$f_b = -g\delta\rho. \quad (3.13)$$

今の場合 $\delta\rho = 1/V(p(z+\delta z), s(z)) - 1/V(p(z+\delta z), s(z+\delta z))$ であり、(3.8) や (3.9) 式と同様な変形をすると

$$f_b = -\frac{gT}{c_p V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} \delta z \quad (3.14)$$

を得る。この復元力によって流体粒子は振動する。その振動数は (3.14) 式を用いて

$$\omega^2 = -\frac{f_b}{\rho\delta z} = \frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz}$$

と与えられ、**ブラント-バイサラ振動数**と呼ばれる。安定な静水圧平衡においてこの浮力により振動する波は**内部重力波**と呼ばれる。

⁶水は 0-4°C で $(\partial V/\partial T)_p < 0$ であるので注意が必要。

3.3 接線不連続面での不安定性

- 接線不連続面をもつ流体を考える。接線不連続面は一定重力場中の水平面 $z = 0$ にあり、その下は密度 ρ_1 をもつ非圧縮性流体1が、上には密度 ρ_2 の非圧縮性流体2にある。それぞれが x 方向に一定速度 U_1, U_2 で運動していて、 y, z 方向の速度は0となっている。圧力は静水圧方程式 (3.3) にしたがって、静水圧平衡が成り立っている。このような接線不連続面をもつ平衡構造の安定性を調べる。
- この平衡状態からわずかにずれた状態、すなわち小さな摂動を加えた状態を考え、その摂動が満たす方程式を導き、その進化を調べる。摂動が大きく成長するのであればもとの平衡状態は不安定だとわかり、逆に摂動が小さいままであるならば安定となる。

摂動を加えた圧力と速度を次のように表す。

$$p = P + \delta p, \quad v_x = U + u, \quad v_z = w. \quad (3.15)$$

ここでは簡単のため y 方向の速度の摂動は0とする。また、各量が y 依存性をもたないことも仮定する。上式において加えられた摂動量はそれぞれ $\delta p, u, w$ である。上記の平衡状態より、非摂動の圧力 P は静水圧方程式 (3.3) を満たし、非摂動の x 方向速度 U は $z < 0$ では U_1 , $z > 0$ では U_2 と書く。

- 小さな摂動量についての方程式を求めよう。そのためには、(3.15) 式を流体の各方程式に代入し、摂動量について1次の項のみを残せばよい。一般に、摂動量の1次についての方程式を用いた解析は**線形安定性解析**と呼ばれ、非線形方程式の定常解に対しよく用いられる。

非圧縮性流体の連続の式 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ からは

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

を得る。オイラー方程式の x, z 成分からは

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{dU}{dz} \right) = -\frac{\partial \delta p}{\partial x}, \quad (3.17)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} + f_b \quad (3.18)$$

を得る。(3.17) 式の dU/dz は $z = 0$ 以外では0である。(3.18) 式右辺の f_b は浮力である。浮力の表式については後で述べる。

上の式の外に、流体1,2を分ける境界（不連続面）のもとの位置 $z = 0$ からのずれを決める方程式も必要である。境界面の位置 $z = \zeta$ はその近傍にいる流体粒子の z 方向の運動で移動することから、 ζ についての方程式は次式となる。

$$\frac{D\zeta}{Dt} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w(z = 0). \quad (3.19)$$

浮力について説明しよう。浮力は $f_b = -g\delta\rho$ で与えられるが、非圧縮性流体を考えているので流体の大部分において密度変化はなく浮力は0である。しかし、境界付近では、境界が ζ だけ変位すると、もともと密度 ρ_1 であったところが ρ_2 になったりまたはその逆という密度変化が起こる。そのため浮力がはたらく。この浮力は、 $\zeta > 0$ の場合

$$f_b = \begin{cases} -g(\rho_1 - \rho_2) & (0 < z < \zeta), \\ 0 & (\text{上の区間以外の } z). \end{cases} \quad (3.20)$$

であり、 $\zeta < 0$ では

$$f_b = \begin{cases} -g(\rho_2 - \rho_1) & (\zeta < z < 0), \\ 0 & (\text{上の区間以外の } z) \end{cases} \quad (3.21)$$

となる。浮力 f_b 自体は小さくないが、働く範囲が狭いため摂動として扱うことができることが後でわかる。(3.16)-(3.21) 式が摂動を記述する方程式である。

- 上の方程式は、各摂動量が次式のように t と x に対し指数関数で依存する解をもつ。

$$w(t, x, z) = w'(z) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (3.22)$$

ここで、波数 k は正の実数で、振動数 ω は一般に複素数である。⁷ 他の摂動 δp , u , ζ も同様な形に書かれる。仮に、(3.22) 式の ω が複素数で、その虚部が正であれば、摂動 w は時間とともに指数的に増大することになり、非摂動状態は不安定である。以下では、 ω がそのような複素数になるかを調べることにより安定性を吟味する。

- 各摂動に対する (3.22) 式のような表式を (3.16), (3.17), (3.19) の各式に代入し、すべての項に含まれる $\exp[i(kx - \omega t)]$ を省略すれば、以下の式を得る。

$$iku' + \frac{dw'}{dz} = 0, \quad (3.23)$$

$$-i\rho(\omega - kU)u' + \rho w' \frac{dU}{dz} = -ik \delta p', \quad (3.24)$$

$$-i(\omega - kU)\zeta' = w'(z=0). \quad (3.25)$$

(3.18) 式については、浮力が働く境界面付近とそれ以外で区別する。 $|z| > |\zeta'|$ では、(3.20), (3.21) 式より浮力は0となるので、次式を得る。

$$-i\rho(\omega - kU)w' = -\frac{d\delta p'}{dz} \quad (z > |\zeta'| \text{ または } z < |\zeta'|). \quad (3.26)$$

一方、浮力が働く微小区間 $-|\zeta'| < z < |\zeta'|$ では、(3.18) 式をこの区間で積分した式を用いる。左辺の各項は、微小幅 $2|\zeta'|$ の z 積分の結果、その幅と w で2次の微小量の項となり無視できる。これに対し $d\delta p/dz$ の項は微小区間で積分すると δp となり、

⁷ $w'(z)$ も複素数であることに注意すること。正確には、(3.22) 式の右辺はその実部のみを考えるべきである。しかし、後の計算を虚部も含め一緒に行うと、計算を簡略化することができる。

この値が微小区間両側で異なれば1次の微小量として残る. さらに (3.20) と (3.21) 式で与えられる浮力の項は積分すると $-g(\rho_1 - \rho_2)\zeta$ となる. よって次式を得る.

$$-[\delta p'(z = |\zeta'|) - \delta p'(z = -|\zeta'|)] - g(\rho_1 - \rho_2)\zeta' = 0. \quad (3.27)$$

これは $z \simeq 0$ の境界面付近で働く浮力により境界面両側で圧力の不連続が生じることを表している. (3.25) と (3.27) 式は $z \simeq 0$ での境界条件として用いられる.

- 流体 1 ($z < 0$) と流体 2 ($z > 0$) のそれぞれの領域において, 方程式 (3.23), (3.24), (3.26) を解こう. 各領域で (3.23), (3.24) 式から u' を消去すると

$$\rho(\omega - kU) \frac{dw'}{dz} = -ik^2 \delta p' \quad (3.28)$$

となる. ここで, それぞれの領域は $z = 0$ を含まず, そこで dU/dz が 0 であることを用いた. この式を z で微分し (3.26) 式に代入して, δp を消去すると

$$\frac{d^2 w'}{dz^2} - k^2 w' = 0 \quad (3.29)$$

を得る. この解に $z \rightarrow \pm\infty$ で発散しないという境界条件を課すと, 各領域で

$$\begin{cases} w'_1 = A_1 e^{kz} & (z < 0), \\ w'_2 = A_2 e^{-kz} & (z > 0) \end{cases} \quad (3.30)$$

を得る. $A_i = w'_i(z = 0)$ である. 一般に w'_i は接線不連続面で不連続である.

- この解に $z = 0$ での境界条件を課す. (3.28) と (3.30) 式を用いると, (3.27) 式は

$$i[\rho_2(\omega - kU_2)w'_2(z = 0) + \rho_1(\omega - kU_1)w'_1(z = 0)] - kg(\rho_1 - \rho_2)\zeta' = 0 \quad (3.31)$$

と変形でき, さらに (3.25) 式を用いて w'_i を消去すると, 最終的に次式を得る.

$$\rho_2(\omega - kU_2)^2 + \rho_1(\omega - kU_1)^2 - kg(\rho_1 - \rho_2) = 0. \quad (3.32)$$

これは振動数 ω と波数 k の間の関係式で, **分散関係**と呼ばれる. 分散関係から ω が複素数となるかどうかが決まる.

- **レーリー - テーラーの不安定性**

$U_1 = U_2 = 0$ の場合の分散関係と不安定性を調べる. この場合不連続面では密度だけが不連続である. この密度不連続面の不安定性は**レーリー-テーラーの不安定性**と呼ばれる. この場合の分散関係は

$$\omega^2 = kg \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3.33)$$

であり、 $\rho_2 > \rho_1$ であれば、(3.33)式右辺は負で振動数 ω は $\omega = \pm i\alpha$ のように純虚数となる。 $(\alpha = \sqrt{kg(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)})$ は正の実数。)各摂動は $\exp(-i\omega t)$ に比例するので、 $\omega = +i\alpha$ のモードをもつ摂動は $\exp(\alpha t)$ のように指数関数的に増大する。したがって、 $\rho_2 > \rho_1$ の状態は(当然だが)不安定であることがわかる。この不安定の成長率 α は $k^{1/2}$ に比例し、波長の短い摂動ほど早く成長することがわかる。

逆に、 $\rho_2 < \rho_1$ の場合は、振動数 ω は実数で、各摂動は時間に対し振動するだけで成長せず、この状態は安定である。この安定な不連続面にたつ波は**表面重力波**と呼ばれ、面を速度 ω/k で伝播する。

ここでは、一定重力場のもとで考えたが、流体が加速度運動をし、その結果慣性力を受ける場合にも、同様な不安定性が起こりうる。例えば、超新星爆発の際に爆発天体より吹き飛ばされた外層が星間ガスと相互作用し減速運動をすると、慣性力の向きが重力と逆向きとなりレーリー-テラーの不安定が生じることが知られている。

● ケルビン - ヘルムホルツの不安定性

速度差のある場合の不安定性を調べる。この接線速度の不連続面の不安定性は**ケルビン-ヘルムホルツの不安定性**と呼ばれる。(3.32)式は ω についての2次方程式でこれを解くと

$$\omega = \frac{k}{\rho_1 + \rho_2} \left[\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2 \pm \sqrt{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)/k - \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2} \right] \quad (3.34)$$

を得る。したがって、

$$k_{\min} = \frac{g(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2} \quad (3.35)$$

という k_{\min} に対し、波数が $k > k_{\min}$ を満たす摂動では振動数 ω が複素数となり、 ω の虚部が正である摂動が時間とともに指数的に成長する。現実においてそのような波数をもつ微小摂動は常に存在するため、よって、速度差がある接線不連続面は常に不安定であることが示された。

3.4 一様等方性乱流

(a) 非定常な流れと乱流の発生

粘性流体の流れの様子はレイノルズ数 $Re = UL/\nu$ の大きさによって変わる。ここで、 U と L は流れの特徴的な速度と長さであり、 ν は動粘性係数(動粘性率)である。レイノルズ数が十分小さい場合には粘性が強く働き、定常流が実現されその速度は位置に対しなだらかに変化する。レイノルズ数があるしきい値を越えると、もとの定常流は不安定となり、摂動が増大する。レイノルズ数とそのしきい値との差があまり大きくない場合は、粘性により不安定性は抑制され、不安定な摂動が成長した結果別の定常流か、または非定常流であるが周期性をもつ規則的な流れが実現される。これに対し、レイノルズ数がさらに大きくなると、周期的運動はいくつかの振動数、波数のモードの重ね合せとなり、複雑

な流れとなる。レイノルズ数が十分に大きくなると、流れは非常に複雑かつ予測不能となり、**乱流**と呼ばれる状態となる。

乱流は、異なった大きさをもつ非常に多数の渦の重ね合わせだと考えるとよい。乱流の特徴は、その非定常性、不規則性、および予測不能性にある。このため、乱流を各位置で正確に記述することは不可能であり、物理的に意味がない。しかしながら、複雑で極めて多自由度であることによって、乱流の記述には統計的手法が有効である。(巨視的物体に対し熱統計力学が有効であるのと同じである。)

(b) 乱流の統計的性質

一様等方な乱流を考える。流れの速度を平均速度とそれからの差に分けよう。この差が、速度の変動部分であり、乱流の特徴を持っている。変動部分の平均的な振幅を Δv と書く。変動部分は様々な波長の成分の重ね合わせであるが、その中で一番大きい成分の波長を L とおく。乱流の一番大きな渦のサイズが L で、その渦の速度が Δv であると言える。これら2つの量で乱流は特徴づけられる。乱流のレイノルズ数は $Re = \Delta v L / \nu$ で与えられる。乱流においては Re は極めて大きい。また、圧力と密度の変動の振幅は $\Delta p \sim \rho(\Delta v)^2$ 、 $\Delta \rho \sim \rho(\Delta v / c_s)^2$ で与えられる。

より小さな渦では、そのサイズ l が小さくなると渦の速度 v_l も小さくなり、それらの運動エネルギーも小さくなる。一方、速度勾配 $dv/dx \sim v_l/l$ は小さな渦の効果がより大きい。乱流はこのような様々なスケールの渦全体であり、それら渦の性質は以下の乱流カスケードという概念により理解される。

● 乱流カスケード

乱流は乱流カスケードというメカニズムで維持される。この乱流カスケードは3つの段階に分けられる。

第1段階は、外部からの作用による一番大きな渦の励起である。外部からの作用には、例えば、重力、磁場、衝突等の様々な原因が考えられる。外部からの作用の特徴によって、一番大きな渦の性質は決まる。外部からの作用による大きな渦への単位質量あたりのエネルギー注入率を ϵ [J/kg/sec] とおく。

第2段階は、渦が壊れ、より小さな渦が生まれる過程である。渦の崩壊時間(寿命)はその周期程度で、 l/v_l と見積もられる。生成された小さな渦もやがて崩壊し、さらに小さな渦を生む。この生成と崩壊が繰り返されることで、大きな渦から極めて小さな渦までの広いサイズの範囲の渦が存在するようになる。このように連鎖的に小さな渦が生成されていくため、この現象は乱流カスケードと呼ばれる。乱流カスケードでは、大きな渦からより小さな渦へエネルギーが移動していくので、**エネルギーカスケード**とも呼ばれる。

第3段階は乱流カスケードの最終段階で、粘性による渦のエネルギーの散逸である。粘性によるエネルギー散逸は、速度勾配の強さで決まり、主に一番小さな渦で起こる。

● 乱流カスケードの速度分布

乱流カスケードにおけるエネルギーの移動を考える。上で述べたように、エネルギーはまず一番大きい渦に ϵ [J/kg/sec] に注入され、そこから渦の崩壊によって、徐々に小さいサイズの渦へエネルギーは受け渡され、最終的に一番小さな渦で粘性によ

り散逸する。各サイズの渦の少し小さい渦へのエネルギー変換率 [J/kg/sec] は、(各サイズの渦の単位質量当たりの運動エネルギー) ÷ (渦の崩壊時間) で与えられ、すなわち

$$v_l^2/(l/v_l) \sim v_l^3/l \quad (3.36)$$

と得られる。一方、この大きい渦から小さい渦へのエネルギーの流れは定常的に進行するため、各サイズでの小さい渦へのエネルギー変換率はサイズによらず一定であり、かつ、 ϵ に等しい。よって

$$\epsilon \sim v_l^3/l, \quad \text{または} \quad v_l \sim (\epsilon l)^{1/3} \quad (3.37)$$

を得る。一番大きな渦でも $\epsilon \sim (\Delta v)^3/L$ が成り立ち、渦の速度は次のようにも書ける。

$$v_l \sim \Delta v(l/L)^{1/3}. \quad (3.38)$$

各サイズの渦の振動数は $\omega \sim v_l/l$ である。この対応関係を用いて、渦の速度を振動数 ω の関数で書くこともできる。対応関係より $v_\omega = v_l \sim (\epsilon v_l/\omega)^{1/3}$ なので

$$v_\omega \sim (\epsilon/\omega)^{1/2}. \quad (3.39)$$

● 一番小さな渦の大きさ

小さい渦では、エネルギー変換率と粘性によるエネルギー散逸率が等しい。後者は $\nu(v_l/l)^2$ と見積もられる⁸。一番小さい渦 l_0 で両者が等しいことから、そのレイノルズ数は $Re(l_0) = v_{l_0}l_0/\nu \sim 1$ となる。この関係式に (3.37) 式や (3.38) 式を代入すると、一番小さな渦のサイズと速度は

$$l_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \sim Re(L)^{-3/4}L, \quad v_{l_0} \sim Re(L)^{-1/4}\Delta v \quad (3.40)$$

と得られる。ここで、 $Re(L) = \Delta v L/\nu \gg 1$ 。 $l_0 \ll l \ll L$ という渦のサイズ範囲は、外部からのエネルギー注入や粘性によるエネルギー散逸がほとんどなく、慣性領域と呼ばれる。

● 乱流カスケードのエネルギー分布

渦のエネルギーのサイズに対する分布 $E(l)$ を求める。各サイズの単位質量当たりの渦のエネルギーは、サイズ幅 $\Delta l \sim l$ として $E(l)\Delta l \sim E(l)l \sim v_l^2$ であるので

$$E(l) \sim (\epsilon^2/l)^{1/3} \sim [(\Delta v)^2/L] (l/L)^{-1/3} \quad (3.41)$$

と求まる。また、波数 $k(=1/l)$ に対する分布 $E(k)$ は

$$E(k) \sim v_l^2/k \sim \epsilon^{2/3}k^{-5/3} \sim (\Delta v)^2L (Lk)^{-5/3} \quad (3.42)$$

となる。振動数 ω に対するエネルギー分布 $E(\omega)$ は次式となる⁹。

$$E(\omega) \sim \epsilon/\omega^2. \quad (3.43)$$

⁸粘性による(単位質量当りの)エネルギー散逸率は、ナビエ-ストークス方程式の粘性項 $\nu \Delta \mathbf{v}$ による仕事率で与えられ、サイズ l の渦に注目するとそれは $\mathbf{v} \cdot (\nu \Delta \mathbf{v}) \sim \nu v_l^2/l^2$ と見積もられる。

⁹各空間におけるエネルギー分布関数 $E(l)$, $E(k)$, $E(\omega)$ はエネルギーの次元を持っていないことに注意しよう。エネルギーの次元を持つのは $E(l)dl$, $E(k)dk$, $E(\omega)d\omega$ である。

- **乱流における拡散過程**

乱流では、多数の渦の運動により運動量やエネルギーの輸送が強く促進される。乱流が不規則であるため、この輸送は拡散的に起こる。乱流の強い拡散効果は、乱流があたかも大きな粘性率 ν_{turb} を持つことで起こると考えることができる。 ν_{turb} は**渦粘性率**、**乱流拡散係数**と呼ばれる。

乱流運動による拡散は主に大きな渦によって引き起こされ、仮想的な渦粘性率は

$$\nu_{\text{turb}} \sim \Delta v L \quad (3.44)$$

という大きさをもつ。粘性率が ν_{turb} 程度の大きさだとすると、 $Re(L) \sim 1$ となり、また一番大きな渦での粘性散逸率は $\nu_{\text{turb}} (\Delta v/L)^2 \sim \Delta v^3/l \sim \epsilon$ のようにエネルギー注入率に等しくなる。すなわち、渦粘性率 ν_{turb} を仮定すると一番大きな渦で粘性によるエネルギー散逸が起こることになる。

4 自己重力流体

4.1 自由落下

- 3.1 節で、球対称な自己重力天体の静水圧構造について述べた。ここでは、圧力が無視できる球対称天体の重力収縮、すなわち自由落下運動について考えよう。初期 $t = 0$ に、位置 r_0 にある流体粒子がどのように中心に落下していくかを調べる。初期 $t = 0$ に天体の各部分は静止しているものとする。流体粒子は天体の自己重力により加速する。球対称な天体内部の重力場は (3.5) 式の $M(r)$ を用いて (3.4) 式で与えられる。流体粒子とともにまわりの流体も落下するため、 $t > 0$ の時間においても、着目する流体粒子の重力場は一定の質量 $M(r_0)$ により決まる。よって、この流体粒子のラグランジュ的な運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM(r_0)}{r^2} \quad (4.1)$$

- エネルギー積分：この式の両辺に速度 dr/dt を掛けて時間積分すると、速度に関する式

$$\frac{dr}{dt} = -\left[2GM(r_0)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]^{1/2} \quad (4.2)$$

を得る。ここで、 $r = r_0$ の初期に速度 dr/dt が 0 であることと落下するのでその速度は負であることを用いた。

- (4.2) の微分方程式は、変数変換 $r/r_0 = \cos^2 \theta$ により容易に積分することができる。実際この変数変換により (4.2) 式は

$$2 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2GM(r_0)}{r_0^3}} \quad (4.3)$$

となり、これを積分して

$$\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \sqrt{\frac{2GM(r_0)}{r_0^3}} t \quad (4.4)$$

を得る。ここで、 $t = 0$ で $\theta = 0$ とした。これより、 θ を媒介変数として、 r を時間 t の関数として表すことができる。

- 上の解を用いて、この流体粒子が中心まで落下するのに要する時間 t_{fall} は次式で与えられる。

$$t_{\text{fall}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM(r_0)}} \quad (4.5)$$

これは**自由落下時間**と呼ばれる。 $r < r_0$ における初期平均密度 $\bar{\rho}(r_0)$ は

$$\bar{\rho}(r_0) = \frac{M(r_0)}{4\pi r_0^3/3} \quad (4.6)$$

で定義される。 これを用いると、自由落下時間 t_{fall} は次式で与えられる。

$$t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}(r_0)}}. \quad (4.7)$$

4.2 ジーンズの不安定性

- 静止した密度と圧力が一様なガスを考える。 一様等方性より自己重力は働かないと仮定する。¹⁰ すなわち、 $\rho_0, p_0, \phi_0 = \text{一定}$, $\mathbf{v}_0 = 0$ とする。 このような一様ガスの自己重力不安定性 を、前章の線形安定解析の手法を用いて調べる。 これは**ジーンズの不安定性**と呼ばれる。
- 各量の摂動を、 $\rho_1, p_1, \phi_1, \mathbf{v}_1$ と書き、断熱的な摂動を考える。 非摂動状態が一様であるため、これら摂動は $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ という座標・時間依存性をもつ。
- 各方程式の摂動1次の式は以下のように得られる。

$$\text{連続の式} \quad -i\omega\rho_1 + i\rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (4.8)$$

$$\text{オイラー方程式} \quad -i\omega\mathbf{v}_1 = -i\mathbf{k} \left(c_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} + \phi_1 \right), \quad (4.9)$$

$$\text{ポアソン方程式} \quad -k^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1. \quad (4.10)$$

これらから \mathbf{v}_1, ϕ_1 を消去して、次の分散関係を得る。

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (4.11)$$

したがって、

$$k < k_J \equiv \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{c_s} \quad (4.12)$$

を満たす波数をもつ摂動は指数的に成長し、自己重力収縮が進行することがわかる。

- 自己重力収縮するガス塊の特徴

¹⁰この非摂動状態に対する重力平衡の仮定は厳密には正しくない。 すなわち、圧力勾配や重力と釣り合う他の効果がなければ平衡にはならない。 しかしながら、他の効果が働くことで平衡状態にある現実の系における自己重力不安定性を理解する上で、単純なジーンズの不安定性の結果は非常に役に立つ。

– ジーンズ波長

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho_0}}. \quad (4.13)$$

– 収縮時間 $\simeq 1/(k_J c_s) = 1/\sqrt{4\pi G\rho_0}$ (\sim 自由落下時間).

– ジーンズ質量

$$M_J \simeq \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \propto \rho_0^{-1/2}. \quad (4.14)$$

問題 18. (4.8)～(4.11) 式を導出せよ.

問題 19. 水素原子 100 コ/cm^3 の密度で温度 10K の分子雲に対し, ジーンズ波長 λ_J [pc] と ジーンズ質量 M_J [太陽質量], 収縮時間 [年] を求めよ.

4.3 ビリアル定理

- 恒星などの静水圧平衡にある球対称な自己重力天体に対し成り立つビリアル定理と呼ばれる関係式を求めよう. 3.1 節で述べたように, 静水圧平衡にある天体の構造を決定するためには, 静水圧方程式の他に温度分布を決めるエネルギー方程式が必要である. それに対し, 以下で求めるビリアル定理の関係式は任意のエネルギー輸送様式に対し普遍的に成り立つ.
- ビリアル定理の導出を, 球対称な自己重力天体に対する静水圧方程式 (3.6) から始めよう. この両辺に r をかけて, さらに天体全体に対し体積積分すると次式を得る.

$$\int_0^R \frac{dp}{dr} r 4\pi r^2 dr = - \int_0^R \frac{GM(r)\rho}{r^2} r 4\pi r^2 dr. \quad (4.15)$$

ここで, R は $\rho = p = 0$ となる天体表面の半径である. 左辺は部分積分で

$$\int_0^R \frac{dp}{dr} 4\pi r^3 dr = [p 4\pi r^3]_0^R - 3 \int_0^R p 4\pi r^2 dr = -3 \int_0^R (\gamma-1) \rho e 4\pi r^2 dr = -3(\gamma-1)U \quad (4.16)$$

と変形でき, 天体の全内部エネルギー U で書ける. ここで, 2 番目の等号以降では理想気体を仮定し比熱は一定とした. 一方, (4.15) 式の右辺は

$$- \int_0^R \frac{GM(r)\rho}{r} 4\pi r^2 dr = - \int_0^{M(R)} \frac{GM(r)}{r} dM(r). \quad (4.17)$$

となり全重力エネルギー W に等しい. よって, 次の**ビリアル定理**の式を得る¹¹.

$$3(\gamma-1)U + W = 0. \quad (4.18)$$

¹¹ここでは, 静止した天体が対象であるので $\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ としたオイラー方程式を用いた. より一般のビリアル定理ではこれらの項も含め, 内部運動があり時間変化する天体に対しても成り立つ関係式が得られている.

問題 20. 天体の全重力エネルギーは一般に次式で与えられる.

$$W \equiv -\frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{G\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (4.19)$$

半径 R の球対称天体に対し, これが (4.17) 式の右辺に等しいことを示せ.
(ヒント) 部分積分して $d\phi/dr = GM(r)/r^2$ を用いる.

- 静水圧平衡にある天体の全エネルギー $U + W$ は, ビリアル定理より

$$U + W = (4 - 3\gamma)U \quad (4.20)$$

となる. $U > 0$ であるので, $\gamma > 4/3$ であれば, 全エネルギーは負であり天体は自己重力で束縛された状態にある. 逆に, $\gamma < 4/3$ ならば束縛状態にない天体であることがわかる.

- 重力で束縛された天体 ($\gamma > 4/3$) が輻射等による外部へのエネルギーを放出し, 負の全エネルギーが減少したとする. このとき, 全重力エネルギー W の絶対値, 全内部エネルギー U , および星内部の平均温度は増加する. すなわち, 自己重力天体はエネルギーを放出すると平均内部温度は上昇するという特別な性質をもっている. これより, 自己重力天体は**負の熱容量**をもっていると言われる.

4.4 ポリトロープガス球の静水圧構造

- 単純な仮定の下で球対称天体の静水圧方程式を解いてみよう. 球対称天体の静水圧方程式 (3.6) に r^2/ρ をかけて微分すると次式を得る.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (4.21)$$

通常, これを解くためには温度分布 $T(r)$ を決めるエネルギー方程式も連立させる必要があるが, ここでは, 圧力分布 $p(r)$ と密度分布 $\rho(r)$ の間にポリトロープの関係式 (1.25) が成り立っているという簡単な状況を考える. すなわち

$$p = K\rho^\Gamma, \quad (K, \Gamma \text{ は定数}). \quad (4.22)$$

ここで, 指数 Γ は一般に比熱比 γ と異なる. 指数 Γ を $\Gamma = 1 + 1/n$ とおくことがよくあり, n は**ポリトロープ指数**と呼ばれる. これを満たす静水圧平衡にある球対称天体は**ポリトロープガス球**と呼ばれる. 理想気体のポリトロープの関係は $T(r) \propto \rho(r)^{1/n}$ という温度分布を仮定したことであり, n が大きいほど等温に近い.

問題 21. 静水圧平衡にある現実の天体は対流に対し安定であり, $ds/dr \geq 0$ を満たしている. これより, 理想気体からなる天体では $\Gamma \leq \gamma$ となることを示せ.

- レーン-エムデン方程式：密度と圧力を無次元媒介変数 θ を用いて次式のように表す。

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad p = p_c \theta^{n+1}. \quad (4.23)$$

これらより指数 $\Gamma = 1 + 1/n$ のポリトロープの関係は自動的に満たされる。これらの表式を (4.21) 式に代入すると θ についての微分方程式が得られる。

$$\left[\frac{(n+1)p_c}{4\pi G \rho_c^2} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n. \quad (4.24)$$

上式の [] 内は長さ 2 乗の次元をもつ。

$$a = \left[\frac{(n+1)p_c}{4\pi G \rho_c^2} \right]^{1/2} \quad (4.25)$$

と定義した長さ a を用いて

$$\xi = r/a \quad (4.26)$$

と規格化した無次元動径座標 ξ を導入する。方程式 (4.24) を r の代わりに ξ で表すと

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (4.27)$$

という無次元化された方程式を得る。これは**レーン-エムデン方程式**と呼ばれ、ポリトロープガス球の内部構造を決定する方程式である。

- θ は $\xi = 0$ で境界条件

$$\theta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (\xi = 0) \quad (4.28)$$

を満たす。前者は (4.23) 式より明らかである。後者は、中心付近で $M(r) \propto r^3$ であり重力や圧力勾配が 0 となるためである。この境界条件を満たす (4.27) 式の解は**レーン-エムデン関数**と呼ばれる。図 11 にはいくつかの n に対するレーン-エムデン関数を示した。 θ は中心から単調に減少し天体表面で 0 となる。表面の動径座標を ξ_1 と表す。天体半径は $R = a\xi_1$ で与えられる。 ξ_1 は n とともに増加し、 $n = 5$ で無限大となる。表 1 にはレーン-エムデン関数の ξ_1 などの定数を記した。

- 天体の全質量 $M(R)$ は次式で与えられる。

$$\frac{M(R)}{4\pi a^3 \rho_c} = \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi = - \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = - \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (4.29)$$

この変形でレーン-エムデン方程式を用いた。また平均密度 $\bar{\rho}$ は次式で与えられる。

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{M(R)}{4\pi R^3 \rho_c / 3} = - \frac{3}{\xi_1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (4.30)$$

問題 22. $n = 0, 1, 5$ の場合のレーン-エムデン関数はそれぞれ以下であることを示せ.

$$\theta_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad \theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \theta_5 = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2}. \quad (4.31)$$

問題 23. ポリトロップガス球の全重力エネルギーは $n < 5$ の場合に

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (n < 5 \text{ の場合}). \quad (4.32)$$

で与えられることを示す. そのため, まず関係式

$$(n+1) \frac{p}{\rho} + \phi = -\frac{GM}{R} \quad (\text{一定}) \quad (4.33)$$

を導出せよ. この関係式とビリアル定理 $W = -3 \int_0^R p dV$ も用いて, (4.32) 式を導出せよ. さらに, $n = 5$ の場合で p_c と ρ_c が 0 でない有限な値をもつときは, 天体の全質量 M も有限であり, かつ全重力エネルギー W は次式で与えられることも示せ.

$$W = -\frac{\sqrt{3}\pi}{32} \frac{GM^2}{a} \quad (n = 5 \text{ の場合}). \quad (4.34)$$

そのため積分公式 $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = \pi/16$ を用いてもよい. (4.32) と (4.34) 式の比較より, n が 5 に十分近いとき $\xi_1 = R/a$ は $\frac{32\sqrt{3}}{\pi(5-n)} \doteq \frac{17.6}{5-n}$ と近似的に与えられることがわかる.

問題 24. $n = 3.4, 4.9, 4.99$ に対しレーン-エムデン関数を数値的に求め, $\xi_1, -\xi_1^2(d\theta/d\xi)_{\xi=\xi_1}$ の値を 6 桁目まで正確に求めよ. また使用したプログラムについて簡単に説明せよ.

問題 25. $n = 3$ のレーン-エムデン関数は恒星内部構造の簡単な見積りに用いられる. これを用いて, 太陽質量 (1.99×10^{30} kg) と太陽半径 (6.96×10^5 km) から太陽の中心密度と中心圧力を見積れ. また, 圧力は理想気体の圧力に等しいとし, 平均分子量は 0.61 として中心温度を見積れ. (参考: Bahcall et al. (1995) の精密な太陽モデルでは $\rho_c = 160$ g/cm³, $p_c = 2.4 \times 10^{16}$ Pa, $T_c = 1.6 \times 10^7$ K.) 同様に $n = 3.4$ の場合も見積れ. さらに, 輻射圧 $p_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4$ は太陽内部で無視できることも示せ. ($\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ W/m²/K⁴, $c = 3.0 \times 10^8$ m/s.)

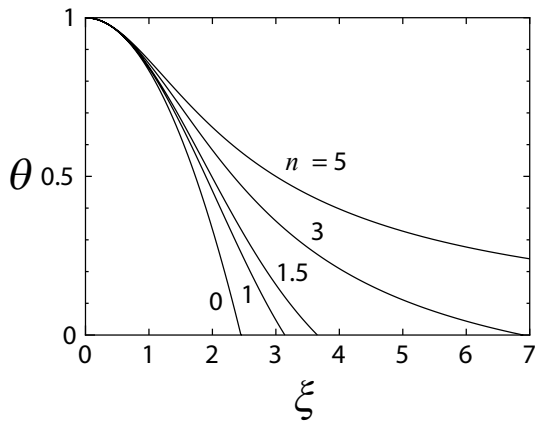


図 11: レーン-エムデン関数の例.

表 1: レーン-エムデン関数の定数

n	ξ_1	$-\xi_1^2(d\theta/d\xi)_{\xi=\xi_1}$	$\rho_c/\bar{\rho}$
0	$\sqrt{6} = 2.45$	$2\sqrt{6} = 4.90$	1
1	$\pi = 3.14$	$\pi = 3.14$	$\pi^2/3 = 3.29$
1.5	3.6538	2.7141	5.9907
3	6.8968	2.0182	54.182
5	∞	$\sqrt{3} = 1.73$	∞

問題 26. 「白色矮星の限界質量」 低質量の恒星は炭素等の中心核をつくった後に核融合反応を終え白色矮星となる。白色矮星内部は 10^7 g/cm^3 程度と極めて高密度となっていて、そのような高密度で発生する電子の縮退圧によって構造が支えられている。

完全縮退した電子の縮退圧はポリトロップの関係式のように密度のべきで近似的に与えられる。そのポリトロピック指数 n は低密度では 1.5 で、密度の増大とともに徐々に増加し、高密度の極限で 3 となる。この高密度極限で、ポリトロップの関係式の係数 K は

$$K = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(m_u \mu_e)^{4/3}} \quad (4.35)$$

と与えられる¹²。ここで、 h はプランク定数、 c は光速、 m_u は原子質量単位、 μ_e は電子 1 個当たりの核子数である。

- 係数 K が中心密度に依らないポリトロップに対して、天体質量 M を ρ_c と K の関数で表し、 $n = 3$ では天体質量が中心密度に依らないことを示せ。
- 白色矮星の質量が増加すると、中心密度や中心圧力を増加させて構造を支える。上の結果を用いて支えられる最大質量が次式で与えられることを示せ。

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2.0182}{4\pi (m_u \mu_e)^2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2}. \quad (4.36)$$

さらに、 $\mu_e = 2.0$ の場合における M_{\max} の値を求め、 $\mu_e = 2$ とする理由も説明せよ。

この最大質量は**チャンドラセカル限界質量**と呼ばれる。ガスの降着で限界質量を越えた白色矮星は、静水圧構造を保てなくなり急激に収縮した後、Ia 型超新星爆発を起こす。

(余談) 「中性子星の静水圧構造」

中性子星は超新星爆発により形成されるさらに高密度な天体である。太陽質量程度の中性子星の中心密度は 10^{15} g/cm^3 位 (核子密度程度) にもなり、その半径は 10km 程度である。このように高密度な中性子星は極めて強い自己重力を持つため、その静水圧構造を調べるには、ニュートン力学ではなく一般相対性理論を用いる必要がある。一般相対性理論に基づいた球対称天体の静水圧方程式は、**TOV 方程式** (Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式) と呼ばれ、次式で与えられる。¹³

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G (M(r) + 4\pi r^3 p/c^2) (\rho + p/c^2)}{r (r - 2GM(r)/c^2)}. \quad (4.37)$$

この方程式と状態方程式 $p = p(\rho)$ より、中性子星の限界質量を調べることができる。相対論的效果で重力が強まるため、TOV 方程式より得られる中性子星限界質量はニュートン力学に基づく (4.36) 式による値 (数太陽質量) に比べてずっと小さくなる。

¹²数密度 n_e の電子のフェルミ運動量 p_F は $p_F \sim \hbar n_e^{1/3}$ で与えられる。高密度で超相対論的な電子のフェルミエネルギーは $\epsilon_F = cp_F$ であり、電子の縮退圧は ϵ_F を 1 電子当たりの体積 $1/n_e$ で微分して求まる。よって、 $p \sim \hbar c n_e^{4/3}$ となり、さらに $n_e = \rho/(m_u \mu_e)$ より $K \sim \hbar c/(m_u \mu_e)$ を得る。

¹³一般相対性理論に基づいた導出は §8.5 を参照。ニュートン力学の静水圧方程式 (3.6) との比較より、一般相対論的效果をみる事ができる。右辺各因子における相対論的效果はすべて重力を強めるように働く。

5 球対称の流れ

5.1 恒星風

恒星風または太陽風は恒星表面から外部へガスが超音速で流出する現象である。恒星風は球対称圧縮性定常流の一例であり、2.6節の超音速への遷移を応用することができる。

(a) 恒星大気の静水圧モデル

- 恒星風の流れを調べる前に、静止した恒星大気の静水圧構造について述べる。コロナを想定し等温大気で近似する。このとき等温音速 $c_s^2 = k_B T/m$ を用いると便利である。太陽コロナは100万度を越える高温でありその音速は100km/secを越える。
- 静水圧方程式に $\rho = p/c_s^2$ を代入し積分すると

$$c_s^2 \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = GM_{\text{star}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \quad (5.1)$$

を得る。ここで、 p_0 は恒星表面での圧力であり R は恒星半径である。これより無限遠での圧力 $p(\infty)$ は次式で与えられる。

$$\frac{p(\infty)}{p_0} = \exp\left(-\frac{GM_{\text{star}}}{c_s^2 R}\right). \quad (5.2)$$

- 上式より、太陽の場合にはそのコロナ温度を用いると、無限遠での圧力は表面での値 p_0 に比べて数桁程度低いという結果を得る。しかし、実際には太陽付近の星間空間の圧力はこの見積りよりさらに何桁も低い。よって、静止した恒星大気の解は実現されず、大気上層から外部へのガス流出、すなわち恒星風が起こる。

(b) 恒星風のパーカー解

- 定常的な恒星風について調べよう。2.6節で述べたように圧縮性気体の定常流はベルヌーイの式で記述されるが、ここではオイラー方程式から始めよう。定常な球対称の流れ ($\mathbf{v} = (v(r), 0, 0)$) を仮定する。 v は速度の r 成分である。重力を含めたオイラー方程式の r 成分は次式のようなになる。

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{GM_{\text{star}}}{r^2}. \quad (5.3)$$

一方、定常流であるので、質量流束 S_j は一定となる。今の場合 $S = 4\pi r^2$ なので

$$4\pi r^2 \rho v = \dot{M}_{\text{out}} \quad (\text{一定}) \quad (5.4)$$

と書かれる。 \dot{M}_{out} は質量放出率である。これを r で微分すると次式を得る。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r}. \quad (5.5)$$

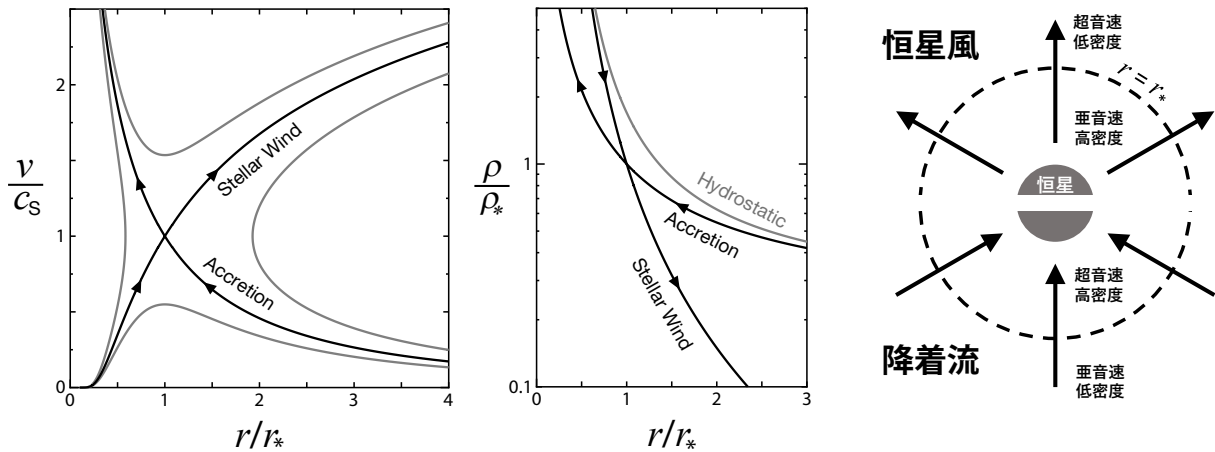


図 12: 左と真中：等温のパーカー解の速度と密度. 右: 恒星風 (上) と降着流 (下) の概念図.

- (5.5) を (5.3) 式に代入すると次の恒星風の方程式を得る.

$$\left(\frac{v^2}{c_s^2} - 1\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{2}{r} - \frac{GM_{\text{star}}}{c_s^2 r^2}. \quad (5.6)$$

この方程式はラバール管の流れの方程式 (2.58) に類似している. その右辺は (ラバール管における dS/dx と同様に) 半径 r の小さいところで負であり大きな r では正となる. 右辺が 0 になる半径 r_* は次式で与えられる.

$$r_* = \frac{GM_{\text{star}}}{2c_s^2}. \quad (5.7)$$

したがって, 恒星風におけるガスの流れは臨界半径 r_* で $v = c_s$ となり, それより内側で亜音速, 外側で超音速となる. この恒星風に対する定常解はパーカー解と呼ばれる. 図 12 に等温の場合のパーカー解を示した.

- 太陽コロナの温度は 150 万度程度で一定とすると, (5.7) 式から太陽風の臨界半径 r_* は太陽半径の 5 倍程度と見積もられる. また, (5.6) 式より, 等温の場合には臨界半径での速度勾配は $dv/dr = \pm c_s/r_*$ を得る. 右辺の符号は恒星風の場合正である.

• 恒星風の加速メカニズム

- 方程式 (5.6) の各項の意味を確認する. (5.6) 式はオイラー方程式を変形したもので, 左辺の括弧内の第 1 項は, もとは $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ で加速度項である. 左辺第 2 項と右辺第 1 項は圧力勾配の項からきている. 右辺第 2 項は重力の項である.
- 臨界半径 r_* の外側の領域では, 左辺と右辺ともに第 1 項の方が大きく, それらが釣り合っている. よって各項の意味より, この領域では圧力勾配により加速されていることがわかる.
- 臨界半径の内側では, 第 2 項同士が釣り合っている. これは圧力勾配と重力の釣り合いを表しており, 静水圧平衡に近いことがわかる (図 12 中). よって, ここでの加速は圧力勾配で決まっているのではない. (5.4) 式の質量流束の一

定を保つために、密度の高い上流側では速度が遅く、密度が下がるにつれて流れが加速しているのだ。そして、その質量流束は臨界半径付近や外側での圧力勾配が駆動しているという仕組みになっている。

問題 27. 臨界半径から外側においてポリトロプの関係式が成り立つ場合において、恒星風の十分遠方での速度（いわゆる**終端速度**）が次式で与えられることを示せ。

$$v(\infty) = \sqrt{\frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1}} c_{s,*} = \sqrt{\frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1}} \frac{GM_{\text{star}}}{2r_*}. \quad (5.8)$$

5.2 降着流

- 球対称の定常流の次の例として、周囲の濃い星間ガスが恒星などの重力源天体に向かって流れ込む場合を考える（図 12 右下を参照）。このような流れは

降着流と呼ばれる。降着流の場合、ガスの速度の r 成分 v は負であるが、恒星風における (5.3)-(5.6) の方程式が同様に成り立つ。そのため、同様に (5.7) 式の臨界半径 r_* で $|v| = c_s$ となる。ただし、降着流においては外側が上流であるため、臨界半径の外側で亜音速、内側で超音速となる（図 12 左）。また、ポリトロプの関係式が成り立つとする。

- 臨界半径での各量は、ベルヌーイの式を用いて見積もられる。ポリトロプの関係式 $P = K\rho^\Gamma$ が成り立つ場合、ベルヌーイの式は次のようにかける¹⁴。

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{c_s^2}{\Gamma-1} - \frac{GM_{\text{star}}}{r} = \frac{c_{s,0}^2}{\Gamma-1}. \quad (5.9)$$

ここで、 $c_s^2 = \Gamma p/\rho$ であり、 $c_{s,0}$ はその十分遠方での値である。遠方で重力ポテンシャルと速度が 0 であることを用いた。この式の左辺に臨界半径での値を入れると

$$c_{s,*} = \sqrt{\frac{2}{5-3\Gamma}} c_{s,0} \quad (5.10)$$

が求まる。1 原子分子気体の降着流でも輻射により冷却されていれば $\Gamma < 5/3$ であり $c_{s,*}$ は有限である。臨界半径 r_* とそこでの密度 ρ_* は

$$r_* = \frac{5-3\Gamma}{2} \frac{GM_{\text{star}}}{2c_{s,0}^2}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{c_{s,*}}{c_{s,0}}\right)^{\frac{2}{\Gamma-1}} = \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} \quad (5.11)$$

と求まる。ここで、 ρ_0 は遠方でのガス密度である。

- 天体への **質量降着率** \dot{M}_{in} は

$$\dot{M}_{\text{in}} = -4\pi r^2 \rho v \quad (5.12)$$

で定義され、 r に依存しない。これを臨界半径での値で表せば上の関係式より

¹⁴1 章で断熱の式を仮定しベルヌーイの式を導出した。断熱の式ではなくポリトロプの関係式が成り立つ場合でも (5.9) 式は成り立つ。実際、 $c_s^2 = \Gamma p/\rho$ に注意し、(5.9) 式を r で微分するとオイラー方程式 (5.3) を得る。すなわち、(5.9) 式は (5.3) 式の積分である。

$$\dot{M}_{\text{in}} = 4\pi r_*^2 \rho_* c_{s,*} = 4\pi \left(\frac{2}{5-3\Gamma} \right)^{\frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)}} \left(\frac{GM_{\text{star}}}{2c_{s,0}^2} \right)^2 \rho_0 c_{s,0} \quad (5.13)$$

と遠方の星間ガスの量を用いて表すことができる。以上の降着流の解と質量降着率は **Bondi 解** と呼ばれる。この質量降着率を **Bondi 半径** $r_B = GM_{\text{star}}/(2c_{s,0}^2)$ を用いて、 $4\pi r_B^2 \rho_0 c_{s,0}$ と近似的に与えることもある。

問題 28. 降着流の加速メカニズムを、恒星風の場合と同様にして方程式 (5.6) に基づき臨界半径の内外それぞれに対して説明せよ¹⁵。

5.3 点源爆発による爆風波

(a) 爆風波の設定

点源爆発で発生した爆風波の一樣媒質 (気体) 中の伝播を調べる。

- 以下を仮定し、流れを決める量は爆発エネルギー E と媒質気体の密度 ρ_0 のみとする。
 - 爆発源から放出されたガスの質量、初期体積、運動量と爆発時間は十分小さい。
 - 周囲の媒質の初期圧力、音速、内部エネルギーは、爆発が強いため無視できる。
 - 輻射等による冷却や重力も無視できる。
- 「爆風波」 = 「媒質気体の流れ」
- 対称性より流れは球対称。

この理想的な爆風波に対しては解析解が得られており、**セドフ解**として知られている¹⁶。

(b) 爆風波の次元解析

次元解析により、基礎方程式を用いずともセドフ解に対し以下の結果が導き出される。

- この問題では 1 つの無次元量 $\frac{r^5 \rho_0}{t^2 E}$ のみが存在。これより各量は一意的に決まる。
- 爆風波各量の時間進化
 - 爆風波の到達半径 $\sim \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}$
 - 伝播速度, 流速 $\sim \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5}$
 - 密度 $\sim \rho_0$
 - 圧力 $\sim \rho_0 \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{2/5} t^{-6/5} \quad (\gg p_0 = \rho_0 c_{s,0}^2 / \gamma)$.

¹⁵ラバールノズルにおける超音速ガスの噴出メカニズムも同様に説明できる。

¹⁶この解析解は 1946 年にセドフにより発表された。数値解はそれ以前にテイラーにより得られている。

- 爆風波の空間構造

- 爆風波の先端は球面状の衝撃波 (マッハ数 $\gg 1$).
- 衝撃波の外側 (前面) は静止した一様媒質.
- 衝撃波内側の速度, 密度, 圧力の空間分布は無次元座標

$$\xi = \left(\frac{\rho_0}{E t^2} \right)^{1/5} r \quad (5.14)$$

のみに依存する. よって各時刻における空間分布は相似形になる. この形の解は自己相似解と呼ばれる.¹⁷

- 衝撃波の位置と伝播速度

- 衝撃波の位置は無次元座標では $\xi = \xi_s$ (定数), r 座標では次式で与えられる.

$$r = r_s(t) \equiv \xi_s \left(\frac{E t^2}{\rho_0} \right)^{1/5}. \quad (5.15)$$

ξ_s の値は流体の方程式を解くことで求まる.

- 衝撃波の伝播速度

$$v_s = \frac{d}{dt} r_s(t) = \frac{2r_s(t)}{5t} = \frac{2\xi_s}{5} \left(\frac{E}{\rho_0 t^3} \right)^{1/5}. \quad (5.16)$$

- セドフ解の成立条件

- 爆発源からの放出ガスの質量 M を無視したので次の条件が必要である¹⁸.

$$M \ll \frac{4\pi}{3} r_s(t)^3 \rho_0. \quad (5.17)$$

- 周囲の媒質の圧力 p_0 を無視したことより

$$p_0 \ll \rho_0 \left(\frac{E}{\rho_0 t^3} \right)^{2/5}, \quad \text{または} \quad c_{s,0} \ll \left(\frac{E}{\rho_0 t^3} \right)^{1/5}. \quad (5.18)$$

これらの条件は, セドフ解が使える時間 t や r_s の下限値及び上限値を与える.

問題 29. 超新星爆発により, 10 太陽質量の物質が 10^{44} J のエネルギーで放出され爆風波を形成した. 伝播する周囲の星間ガスは数密度 1 コ/cm^3 の水素原子気体で温度は 100K とする. このとき, セドフ解を近似的に用いることができる伝播半径 $r_s[\text{pc}]$ と時間 $t[\text{年}]$ の下限と上限をそれぞれ (5.17), (5.18) 式より見積もれ.

¹⁷2.2 節の希薄波も自己相似解である. そこでの無次元座標は $x/(tc_{s,0})$ であった.

¹⁸(5.17) 式の逆の極限である, 周囲の媒質の質量が無視できるような爆発初期段階は自由膨張段階と呼ばれる. この段階では放出ガスは等速度で広がる.

(c) セドフ解の導出

- 衝撃波後面の各量 (v_1, ρ_1, p_1) は強い衝撃波の近似 ($p_1/p_0 \gg 1$) から求まる.

– 密度は (2.38) 式より

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0. \quad (5.19)$$

– 速度は, 衝撃波静止系の前後面の速度を $u_0, u_1 (< 0)$ と書くと $v_s = |u_0|$ なので

$$v_1 = u_1 - u_0 = \left(1 - \frac{|u_1|}{|u_0|}\right) v_s = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) v_s = \frac{2}{\gamma + 1} v_s. \quad (5.20)$$

– 圧力は, (2.43) 式で強い衝撃波を仮定すると

$$u_0^2 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_1}{p_0} c_{s,0}^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{p_1}{\rho_0} \quad (5.21)$$

となるので

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_s^2. \quad (5.22)$$

これらが方程式を解く際の $r = r_s(t)$ における境界条件となる.

- 自己相似解を表す無次元変数 $v'(\xi), \rho'(\xi), p'(\xi)$ の導入

次元のある変数 v, ρ, p と無次元変数との関係を次のように与える.

$$v(r, t) = \frac{2r}{5t} v'(\xi), \quad \rho(r, t) = \rho_0 \rho'(\xi), \quad p(r, t) = \rho_0 \left(\frac{2r}{5t}\right)^2 p'(\xi). \quad (5.23)$$

これら無次元変数の境界 $\xi = \xi_s$ での値は, (5.19)-(5.22) 式より次式となる.

$$v'(\xi_s) = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \rho'(\xi_s) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad p'(\xi_s) = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (5.24)$$

- 連続の式と断熱の式は球対称の場合には次のように書ける.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}\right) \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \quad (5.25)$$

ここで, $p/\rho^\gamma = A e^{s/cv}$ ([1.65] 式) を用いた. これらに (5.23) 式を代入すれば, 無次元変数に対する方程式が求まる. 無次元変数に対する時間微分や r 微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho'(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d\rho'}{d\xi} = -\frac{2\xi}{5t} \frac{d\rho'}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \rho'(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{d\rho'}{d\xi} = \frac{\xi}{r} \frac{d\rho'}{d\xi} \quad (5.26)$$

のようであるので, (5.25) の偏微分方程式は次の常微分方程式になる.

$$\frac{dv'}{d \ln \xi} + (v' - 1) \frac{d \ln \rho'}{d \ln \xi} = -3v', \quad \frac{d}{d \ln \xi} \ln \frac{p'}{\rho'^\gamma} = -\frac{2v' - 5}{v' - 1}. \quad (5.27)$$

● 断熱積分

上の2つの式から積分が1つ得られる。(5.27)の第1式を $(v' - 1)$ で割ったものと第2式とで両辺足し合わせると¹⁹

$$\frac{d}{d \ln \xi} \ln [\xi^5 (v' - 1) p' \rho^{1-\gamma}] = 0. \quad \text{よって} \quad \xi^5 (v' - 1) p' \rho^{1-\gamma} = \text{const.} \quad (5.28)$$

● エネルギー積分

オイラー方程式の代わりにエネルギー保存の式を用いて、もう1つの積分を求める。

– 半径 r の球の中のエネルギーは

$$E(r) = \int_0^r \varepsilon 4\pi r^2 dr. \quad (5.29)$$

ここで、 $\varepsilon \equiv \rho(\frac{1}{2}v^2 + e)$ は単位体積当たりのエネルギーである。エネルギー保存と断熱の仮定より $E(r_s(t)) = E$ (爆発エネルギー)である。

– $E(r)$ は自己相似性より次の性質を持つ。ある1つの ξ に対応する半径 $r(\xi)$ は

$$r(\xi) = \xi \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5} \quad (5.30)$$

のように時間とともに増大する。半径 $r(\xi)$ で定義される比 $E(r(\xi))/E$ は、自己相似性より時間によらず一定である。すなわち、一定の ξ に対し

$$\frac{d}{dt} E(r(\xi)) = 0. \quad (5.31)$$

– (5.31)式の左辺を(5.29)式の表式を用いて実際に時間微分すると

$$\frac{d}{dt} E(r(\xi)) = \int_0^{r(\xi)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} 4\pi r^2 dr + \varepsilon 4\pi r(\xi)^2 \frac{dr(\xi)}{dt} \quad (5.32)$$

となる。この右辺第1項はエネルギー保存の式(1.37)より

$$\text{第1項} = - \int_0^{r(\xi)} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) \right] 4\pi r^2 dr = -\rho v \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) 4\pi r(\xi)^2 \quad (5.33)$$

と変形される。さらに、第2項には $dr(\xi)/dt = 2r(\xi)/(5t)$ を用いて、第1項と第2項の和が0より、次の関係式を得る。

$$\rho v \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) = \frac{2r}{5t} \rho \left(\frac{1}{2}v^2 + e \right). \quad (5.34)$$

この等式の左辺はエネルギー流束により半径 r から流れ出るエネルギーを表し、右辺は半径 $r(\xi)$ の増加により新たに半径内に入る流体のエネルギーである。 $E(r(\xi))$ の不変性より両者は等しくなければならない。

¹⁹(5.28)の第2式の積分定数は境界条件より求まる。

– 理想気体の場合 $e = \frac{1}{\gamma-1}p/\rho$, $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}p/\rho$ であるので, (5.34) 式は

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\gamma-1}{2}v^2 \frac{v - \frac{2r}{5t}}{\gamma v - \frac{2r}{5t}} \quad \text{または} \quad \frac{p'}{\rho'} = -\frac{\gamma-1}{2}v'^2 \frac{v'-1}{\gamma v'-1} \quad (5.35)$$

と変形できる. 上式は衝撃波後面での境界条件 (5.24) を満たす.

- 上記の積分を用いて厳密解を求める. 上の2つの積分 (5.28) と (5.35) より

$$\xi^5 \frac{v'^2 (v'-1)^2}{\gamma v'-1} \rho'^{2-\gamma} = \text{const.} \quad (5.36)$$

を得る. これを用いると (5.27) の第1式は v' の1階微分方程式

$$-\frac{1}{(3\gamma-1)v'-5} \left(\gamma+1 + \frac{\gamma-1}{\gamma v'-1} - \frac{2}{v'} \right) \frac{dv'}{d \ln \xi} = 1 \quad (5.37)$$

に変形される. さらに, 部分分数分解をすると

$$\left(\frac{a}{v'-5/(3\gamma-1)} + \frac{b}{v'-1/\gamma} - \frac{2}{5v'} \right) \frac{dv'}{d \ln \xi} = 1 \quad (5.38)$$

の形にできる. ここで, a , b は次式で与えられる定数である.

$$a = -\frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{5(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \quad b = \frac{\gamma-1}{2\gamma+1}. \quad (5.39)$$

(5.38) 式は変数分離形で容易に積分でき, 最終的に v' の解を次のように得る.

$$\left[\frac{(3\gamma-1)v'-5}{(\gamma-7)/(\gamma+1)} \right]^a \left[\frac{\gamma v'-1}{(\gamma-1)/(\gamma+1)} \right]^b \left[\frac{\gamma+1}{2} v' \right]^{-2/5} = \frac{\xi}{\xi_s}. \quad (5.40)$$

ここで各因子の係数は $\xi = \xi_s$ での境界条件 $v' = 2/(\gamma+1)$ を満たすように決めた.

- 密度 ρ' は, (5.40) 式を (5.36) 式に代入し, 次のように v' で表すことができる.

$$\rho' = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\frac{(3\gamma-1)v'-5}{(\gamma-7)/(\gamma+1)} \right]^{a'} \left[\frac{\gamma v'-1}{(\gamma-1)/(\gamma+1)} \right]^{b'} \left[\frac{v'-1}{(1-\gamma)/(\gamma+1)} \right]^{c'}. \quad (5.41)$$

ここでも係数は境界条件を満たすように決めた. またべき指数 a' , b' , c' は

$$a' = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)(2-\gamma)}, \quad b' = \frac{3}{2\gamma+1}, \quad c' = -\frac{2}{2-\gamma}. \quad (5.42)$$

である. ρ' を (5.35) 式に代入すれば, p' の表式も得ることができる. 図13には $\gamma = 5/3$ と 1.4 の場合のセドフ解を示した.

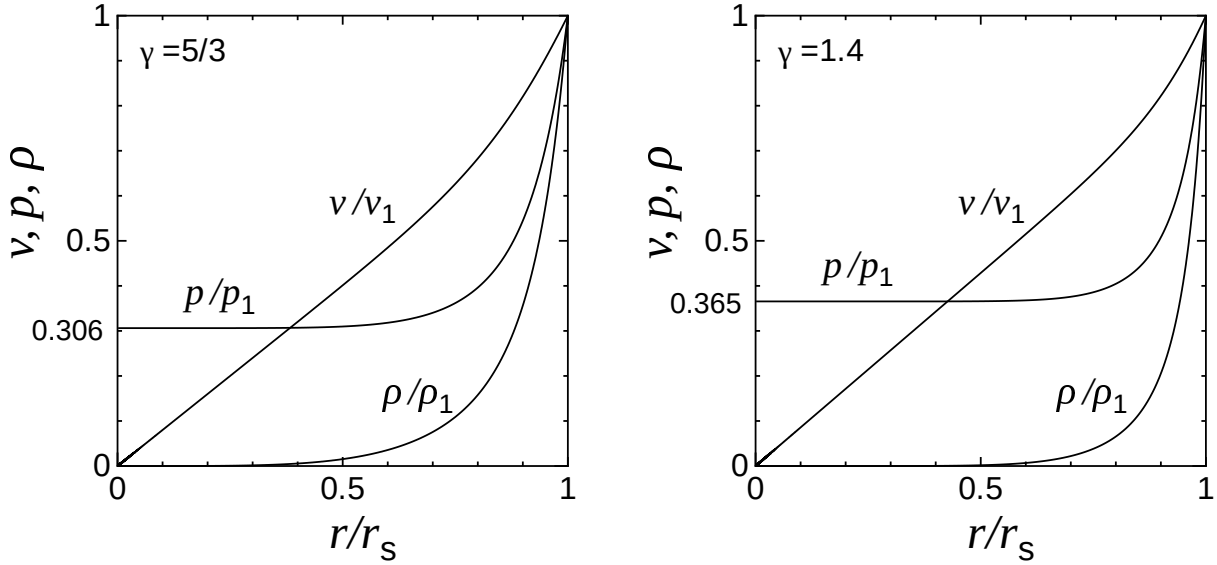


図 13: $\gamma = 5/3, 1.4$ の場合のセドフ解. これらの場合には密度比 ρ_1/ρ_0 が 4, 6 と大きく, 爆風で吹き飛ばされたガスは衝撃波面付近に集中した分布となる.

- 定数 ξ_s は, 全エネルギーの式 $E(r_s) = E$ より決まる. $r = r_s$ での (5.29) 式を無次元変数で表し, さらに新たな変数 $\chi = \xi/\xi_s$ を導入して

$$\xi_s^5 \frac{16\pi}{25} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \rho' v'^2 + \frac{p'}{\gamma-1} \right) \chi^4 d\chi = 1 \quad (5.43)$$

を得る. よって, この積分を得られた解を用いて数値的に計算することで, ξ_s が求まる. 例えば, $\gamma = 5/3, 7/5$ の場合では, それぞれ $\xi_s = 1.1517, 1.0328$ となる.

問題 30. 中心付近でのセドフ解: $\xi \ll \xi_s$ において v' は $1/\gamma$ に近づくことを示せ. これより, 速度や密度, 圧力, 温度はそれぞれ中心付近で以下のような半径 r 依存性をもつことを示せ. ($\gamma < 7$ としよ.)

$$v \propto r, \quad \rho \propto r^{3/(\gamma-1)}, \quad p = \text{const.}, \quad T \propto r^{-3/(\gamma-1)}. \quad (5.44)$$

問題 31. (5.43) 式を導出せよ.

(余談) 断熱積分について

(5.28) 式の積分はエントロピーの保存に起因していることを示しておく. エネルギーの積算分布 $E(r(\xi))$ と同様に, エントロピーに関連した量 $p/\rho^\gamma (\propto e^{s/cv})$ の積算分布

$$Y(r(\xi)) = \rho_0^{\gamma-1} \int_{r(\xi)}^{r_s(t)} \rho \frac{p}{\rho^\gamma} 4\pi r^2 dr \quad (5.45)$$

を定義する²⁰. この積分もエネルギーの次元を持つので, $E(r(\xi))$ と同様に自己相似性が

²⁰この被積分関数は $r = 0$ で発散するため, 積分範囲が $r = 0$ を含まないように定義するのが適当である.

ら時間によらず一定である。一方、(5.25)式からエントロピー保存の式と同等な式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \rho \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{p}{\rho^\gamma} \rho v \right) = 0 \quad (5.46)$$

も得られる。エネルギー積分の場合と同様に、 ξ 一定での時間微分 $dY(r(\xi))/d \ln t$ の表式に保存式(5.46)を用いることで、任意の $\xi (\leq \xi_s)$ に対し

$$\left[4\pi r^2 \rho \left(\frac{2r}{5t} - v \right) \frac{p}{\rho^\gamma} t \right]_{r(\xi)}^{r_s(t)} = 0, \quad \text{または} \quad 4\pi r^2 \rho \left(\frac{2r}{5t} - v \right) \frac{p}{\rho^\gamma} t = \text{const.} \quad (5.47)$$

という積分が得られる。(5.47)式を無次元量で表すと(5.28)式になる²¹。

(d) 冷却を考慮した爆風波

セドフ解は衝撃波面内部で断熱を仮定していた。しかし、現実の超新星爆発における爆風波では輻射による冷却効果が時間とともに重要になる。そのため、問題29の見積りよりずっと早い段階($\sim 10^4$ 年)でセドフ解は使えなくなる。冷却が効果的になった以降の2つの段階の爆風波についても述べておく²²。

● 圧力駆動の雪かき段階

輻射による冷却は衝撃波面付近の高密度な球殻の部分のみで進行し、一方内側の低密度ガスは冷却されず高温・高圧の状態を保つ。冷却した高密度な球殻は、内側の高い圧力で押されながら膨張を続ける。この段階は**圧力駆動の雪かき段階**と呼ばれる。この段階の球殻の膨張を次元解析から見積ろう。内側のガスは断熱的に膨張し、圧力は $pV^\gamma = \text{一定}$ で減少する。ここで、 V は内側のガスの体積で、 r_s^3 に比例するので $p \propto r_s^{-3\gamma}$ となる²³。また、この圧力は衝撃波後面の圧力と同程度で $p \simeq \rho_0 v_s^2$ である([5.22]式参照)。よって、 $v_s \sim r_s/t$ なので

$$r_s \propto t^{2/(3\gamma+2)}, \quad p \propto t^{-6\gamma/(3\gamma+2)} \quad (5.48)$$

と膨張することがわかる。 $\gamma > 1$ なので、セドフ解の場合よりも圧力の減衰ははやく、膨張は緩やかである。

● 運動量保存の雪かき段階

断熱膨張により圧力が十分低下すると、球殻は内側から押されなくなり、それ以降は運動量を保存させ膨張を続ける。爆発源から球殻の微小立体角部分の運動量は $\Delta M v_s$ で与えられ、これが保存する。球殻の微小立体角部分の質量 ΔM は r_s^3 に比例するから、球殻の膨張速度は $v_s \propto r_s^{-3}$ となる。積分すると、球殻半径の進化として $r_s \propto t^{1/4}$ を得る。通常 $\gamma < 2$ であるので、圧力駆動の雪かき段階よりも膨張は緩やかである。膨張速度が外部の媒質の音速程度となると膨張は止まる。

²¹または、(5.46)式に対して、連続の式を変形したのと同様に、(5.23)式を代入し(5.26)式を用いて変形することでも、(5.28)式を求めることができる。

²²実際は、外部の媒質の密度 ρ_0 が一様でないために、超新星残骸の進化はより複雑になる。

²³冷却した球殻は薄く、衝撃波面 r_s と球殻の内径はほぼ等しい。

6 磁気流体力学の基礎

6.1 磁気流体力学の基礎方程式

(a) 磁気流体

- 宇宙においては電離気体（プラズマ）を扱うことが多い。例えば、恒星内部や HII 領域は完全電離プラズマであり、電離度の低い HI 領域や分子雲も弱電離プラズマと呼ばれその電離度を無視できないことが多い。これらの場合、流体と電磁場との間の相互作用が重要であり、流体の方程式を Maxwell 方程式と連立させて解くことが必要となる。
- Maxwell 方程式 (MKSA 単位系, または SI 単位系)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday の誘導法則}), \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_e \quad (\text{Ampère-Maxwell の法則}). \quad (6.4)$$

しばしば用いられる cgs-gauss 単位系の式にするには、各式の \mathbf{D} を \mathbf{E} , \mathbf{H} を \mathbf{B} で表し $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/c$, $\varepsilon_0 \rightarrow 1/(4\pi)$, $\mu_0 \rightarrow 4\pi/c^2$ という変換をすればよい²⁴。この cgs-gauss 単位系への変換公式は上の Maxwell 方程式だけでなく、この節のすべての式に有効である。

- 磁気流体力学における仮定（性質）

1. 電気的中性

$$\text{電荷密度: } \rho_e \equiv \sum_i q_i n_i = 0, \quad \text{電流密度: } \mathbf{j}_e \equiv \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i \neq 0. \quad (6.5)$$

(n_i, q_i, v_i : 粒子種 i の数密度, 電荷, および, 平均速度)

2. 非相対論的 ($v \ll c$)

3. オームの法則（定常電流）

$$\mathbf{j}_e = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.6)$$

(σ は電気伝導度。磁場によるホール効果は無視²⁵.)

²⁴磁場と $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ という関係にあるベクトルポテンシャル \mathbf{A} は $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/c$ と変換する。このように cgs-gauss 単位系への変換は簡単だが、cgs-gauss 単位系の式を MKSA 単位系へ変換することは容易でない。

²⁵ $|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}| \ll E/B$ である場合にはホール効果は無視できる。ホール効果等を考慮した一般化されたオームの法則は 6.4 節で説明する。

4. Ampèreの法則 (準定常電磁場). (6.4)において変位電流 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を無視して^{26,27}

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_e. \quad (6.7)$$

5. その他の簡単化

誘電率は ϵ_0 , 透磁率は μ_0 ($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$), 電気伝導度 σ は定数.

(b) 基礎方程式

● 磁気流体に働くローレンツ力

電磁場から各荷電粒子が受ける力はローレンツ力 $q_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$ である. これより, 単位体積の流体が電磁場から受ける力は

$$\sum_i n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (6.8)$$

と表される. この変形で電気的中性の式と電流密度の定義式 (6.5), および, Ampèreの法則 (6.7) を用いた. (6.8) 式右辺は次のように書くこともできる.

$$-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (6.9)$$

$$\left[-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right]_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij} \right). \quad (6.10)$$

(6.9) 式右辺第1項は, 磁気圧 $B^2/2\mu_0$ による力であり第2項は磁気張力である. (6.10) 式の表式の括弧内は磁場による Maxwell の応力テンソルである.

● 磁気流体の運動方程式はオイラー方程式に上のローレンツ力を加えたものである.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (6.11)$$

または

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \left[p + \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) \right] + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (6.12)$$

● 磁場の誘導方程式 (磁場の進化方程式)

Ampère の法則 (6.7) とオームの法則 (6.6) より, 電場に対する次の表式を得る.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (6.13)$$

²⁶変位電流が \mathbf{j}_e に比べ無視できるための条件は, 電磁場が変化する時間を T としオームの法則を用いると, $T \gg \epsilon_0 / \sigma$ と書ける.

²⁷電流密度 \mathbf{j}_e はオームの法則から決まる. その際 Ampère の法則 (6.7) も同時に満たされるのは以下の理由のためである. 差 $\Delta \mathbf{j}_e = \mathbf{j}_e - \nabla \times \mathbf{H}$ が存在すると, 電場は (6.4) 式より $\Delta \mathbf{j}_e$ と逆方向に変化し, オームの法則から \mathbf{j}_e は $\Delta \mathbf{j}_e$ を打ち消すように変化する. その結果, 差 $\Delta \mathbf{j}_e$ は ϵ_0 / σ 位の時間で減衰する.

この式の両辺の rot をとったものと (6.3) 式から $\nabla \times \mathbf{E}$ を消去し、**磁場の誘導方程式**

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (6.14)$$

を得る。ここで、ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$ および $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を用いた。(6.14) 式右辺第 2 項の係数 $1/\mu_0 \sigma$ は [長さ²/時間] の次元を持ち、**磁気拡散係数**と呼ばれる。

- **磁場のエネルギー保存の式**は (6.14) 式よりも (6.3) 式から導く方が簡単だ。この式と \mathbf{B}/μ_0 との内積をとると

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (6.15)$$

を得る。左辺は $\frac{\partial |\mathbf{B}|^2}{\partial t} \frac{1}{2\mu_0}$ である。右辺は、公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ より

$$-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{\mu_0} [\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})] \quad (6.16)$$

となる。更に右辺第 2 項をオームの法則と Ampère の法則を用いて変形し、求める式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j}_e \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{j}_e|^2}{\sigma}. \quad (6.17)$$

左辺は単位体積当たりの磁場エネルギーの時間変化であり、右辺で決まる。右辺第 1 項は Poynting ベクトルによる磁場エネルギーの輸送による項を表し、第 2 項はローレンツ力が流体にした仕事による項を、第 3 項はジュール熱として失われる磁場エネルギーを表す。

問題 32. 磁気流体の運動量保存の式 運動方程式 (6.11) または (6.12) は、オイラー方程式に対する (1.18) 式と全く同じ保存形に書くことができる。そこに現れる磁気流体の運動量流束密度テンソル Π_{ij} の表式を導け。

問題 33. (6.17) 式を導出せよ。

問題 34. 磁気流体において、電場エネルギー $\varepsilon_0 E^2/2$ は磁場エネルギー $B^2/2\mu_0$ に比べ無視できるとされている。電場の大きさは (6.13) 式右辺第 1 項または第 2 項のいずれかで見積もることができる。それぞれの見積りに対して、電場エネルギーが無視できるための条件は

$$v/c \ll 1, \quad \mu_0 \sigma L c \gg 1 \quad (6.18)$$

となることを示せ。但し、 L は磁場が変化する特徴的な距離である。また、上の 2 つめの条件式の物理的意味を説明せよ。

6.2 磁場の凍結と拡散

● 磁束の時間進化

面積 S を横切る磁束 Φ_S :

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.19)$$

流体とともに動く面積 S に対する磁束を考える．その時間変化は次式のように書ける．

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \sum_k \mathbf{B}_k \cdot \frac{d\Delta \mathbf{S}_k}{dt}. \quad (6.20)$$

ここで，右辺第2項は面積が変化することによる項であり， $\Delta \mathbf{S}_k$ は面 S を小部分に分割した各面積に \mathbf{n} をかけたものである．面積の変化は S の境界である閉曲線 C の移動によって起こるので²⁸，右辺第2項は次のように変形できる．

$$\sum_k \mathbf{B}_k \cdot \frac{d\Delta \mathbf{S}_k}{dt} = \sum_m \mathbf{B}_m \cdot (\mathbf{v}_m \times \Delta \mathbf{l}_m) = \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.21)$$

ここで， $\Delta \mathbf{l}_m$ は閉曲線 C を分割した各小区間を表す．さらに，磁場の誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{j}_e \quad (6.22)$$

とも書けるので，これを (6.20) 式右辺第1項に代入すると，結局次式を得る．

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_S (\nabla \times \mathbf{j}_e) \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{1}{\sigma} \oint_C \mathbf{j}_e \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.23)$$

● 磁場の凍結

完全電離気体など電気伝導度 σ が十分大きい流体では，(6.23) 式右辺は小さく0とみなせる．その場合，流体とともに運動する任意の S に対し磁束は一定となり，磁力線は流体とともに動くことになる．このことを磁力線が流体に凍結している，または簡単に**磁場の凍結**という．

● 磁場の拡散

磁場は誘導方程式 (6.14) に従い拡散する．拡散時間は，磁場が変化する距離 L と拡散係数 $1/\mu_0\sigma$ から $L^2\mu_0\sigma$ と与えられる．磁場の拡散によって，磁束は (6.23) 式にしたがって減少する²⁹．減少分の磁力線は閉曲線 C の外側に出たことになっている³⁰．これは，流体からの磁力線のすり抜け（または磁力線からの流体のすり抜け）が起きていると解釈される．

²⁸ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より，磁束は S の境界である閉曲線 C を決めれば一意的に決まる．

²⁹磁束密度が閉曲線 C 内でまわりより高い場合に磁束は減少する．

³⁰面 S を取り囲む外側の面 S' の対する磁束の変化を (6.23) 式と同様に考えると，閉曲線 C を介し S と S' の間で磁力線の受け渡しがあることがわかる．

6.3 アルフベン波

音波は流体の圧縮性による波であったが、磁気流体には非圧縮性の波が存在する。これについて調べよう。

- 非摂動状態は一定磁場 \mathbf{B}_0 の中の静止した一定密度 ρ_0 の流体。温度や圧力等も一定とする。
- 摂動：流体の密度、圧力、速度と磁場の摂動をそれぞれ ρ_1 , p_1 , \mathbf{v}_1 , \mathbf{B}_1 で表す。また、完全導体 ($\sigma \rightarrow \infty$) と断熱 ($s_1 = 0$, $p_1 = c_s^2 \rho_1$) を仮定する。
- 摂動方程式

$$\text{連続の式 (非圧縮)} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (6.24)$$

$$\text{オイラー方程式} \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla \left(c_s^2 \rho_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1, \quad (6.25)$$

$$\text{磁場の誘導方程式} \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (6.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0. \quad (6.27)$$

- オイラー方程式 (6.25) の両辺に div を作用させ、(6.24), (6.27) 式を用いると

$$\Delta \left(c_s^2 \rho_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 \right) = 0 \quad (6.28)$$

を得る。これを遠方で発散しないという境界条件で積分すると

$$c_s^2 \rho_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 = \text{const}. \quad (6.29)$$

となる。これをもとのオイラー方程式 (6.25) に代入して結局次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1. \quad (6.30)$$

- 磁場の誘導方程式 (6.26) は、右辺がベクトル公式と $\mathbf{B}_0 = \text{一定}$, 連続の式を用いて

$$[\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)]_i = \frac{\partial}{\partial x_l} (v_{1,i} B_{0,l}) - \frac{\partial}{\partial x_l} (v_{1,l} B_{0,i}) = [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1]_i \quad (6.31)$$

と変形できるので、次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1. \quad (6.32)$$

- 摂動を

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}'_1 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad (6.33)$$

とおき、これらを (6.30) と (6.32) 式に代入して \mathbf{B}'_1 を消去することで、**分散関係**

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \quad (6.34)$$

を得る。この波は**アルフベン波**と呼ばれる。アルフベン波の群速度（伝播速度）は

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} \quad (6.35)$$

となる。すなわち、群速度の方向は非摂動の磁場の方向に等しく、大きさは $v_A \equiv B_0 / \sqrt{\rho_0 \mu_0}$ である。この速度 v_A は**アルフベン速度**と呼ばれる³¹。

- **アルフベン波の復元力**

流体が磁場 \mathbf{B}_0 の中を磁場に垂直な方向に \mathbf{v}_1 で運動したとする。そのとき、 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0$ の方向に電場が生じ電流 \mathbf{j}_e が流れる。これによって、流体にはローレンツ力 $\mathbf{j}_e \times \mathbf{B}_0$ が働く。このローレンツ力は $-\mathbf{v}_1$ の方向を向いており、復元力として働く。

また、磁力線の張力によって復元力が生じるという解釈も有効である。張力 T がかかっている線密度 λ の弦の波は速度 $\sqrt{T/\lambda}$ で伝播する。単位面積当たりの磁力線にかかる張力は今の場合 B_0^2/μ_0 であり、線密度は ρ_0 であるので、 $\sqrt{T/\lambda} = \sqrt{B_0^2/(\mu_0 \rho_0)} = v_A$ となり、この解釈によりアルフベン速度を説明することができる。

6.4 弱電離プラズマにおける一般化されたオームの法則と誘導方程式

磁場中の電流は、ホール効果や両極性拡散といった現象により影響を受ける。そのため、ある条件下では (6.6) 式のオームの法則に修正が必要となる。ここでは、弱電離プラズマにおける電磁場中の荷電粒子のミクロな運動を調べ、一般化されたオームの法則を導出しておこう。この一般化によって磁場の誘導方程式も修正される。希薄な弱電離プラズマにおいてこの一般化が重要となることが以下で示される。

弱電離プラズマでは、中性粒子（原子や分子）に比べてごく少量の荷電粒子により電流が流れる。荷電粒子は電磁場により加速される一方、中性粒子との衝突により減速される。中性粒子が静止している系で粒子種 i の荷電粒子の平均速度 \mathbf{u}_i を考える。質量 m_i と電荷 q_i をもつ荷電粒子 i の運動方程式は次式のように書ける。

$$m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = q_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \frac{m_i \mathbf{u}_i}{\tau_i}. \quad (6.36)$$

上式右辺第2項は、中性粒子との衝突による抵抗力を表す項で、 τ_i は中性粒子との衝突により荷電粒子の速度が減速する時間である。減速時間 τ_i は荷電粒子が軽い場合中性粒子との**衝突時間**に等しく、中性粒子の数密度に反比例する。但し、荷電粒子が中性粒子より重い場合 τ_i は衝突時間よりも質量比だけ長くなる。弱電離プラズマであるので、中性粒子以外との衝突の効果は無視できる。また重力もローレンツ力に比べ無視できる。

(6.36) 式の右辺の2つの力の時間変化が小さい場合は、これらが釣り合った定常状態が実現され左辺の加速度項は無視できる。以下この定常状態を仮定する。磁場中のこの力の

³¹非圧縮の近似が成り立つための条件は 1.7 節より $\omega \ll kc_s$ である。これは $v_A \ll c_s$ とも書ける。

釣り合いは次式のように書くと便利である.

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} - \frac{B}{\beta_i} \mathbf{u}_i = 0. \quad (6.37)$$

ここで, ホールパラメーター β_i は

$$\beta_i = \frac{q_i B}{m_i} \tau_i \quad (6.38)$$

という正または負の無次元量で, 荷電粒子の**エピサイクル振動数**と減速時間の積である.

磁場中の電流として, まず磁場に平行な電流密度の成分を考える. 荷電粒子の速度を磁場に平行な成分 $\mathbf{u}_{\parallel i}$ と垂直な成分 \mathbf{u}'_i とに分ける. 電場や他のベクトルも同様の表記で分けると, (6.37) 式の磁場に平行な成分より, 各荷電粒子の磁場に平行な速度は

$$\mathbf{u}_{\parallel i} = \frac{\beta_i}{B} \mathbf{E}_{\parallel} \quad (6.39)$$

と求まる. 電流密度の磁場に平行な成分 \mathbf{j}_{\parallel} は

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \sum_i q_i n_i \mathbf{u}_{\parallel i} = \sigma_C \mathbf{E}_{\parallel} \quad (6.40)$$

と書ける. ここで σ_C は通常の**電気伝導度**で

$$\sigma_C = \frac{1}{B} \sum_i q_i n_i \beta_i \quad (6.41)$$

で与えられる. σ_C は比 β_i/B と同じように磁場の強さに依らない. 電子は軽いのでエピサイクル振動数が大きく, $|\beta_e|$ も他の荷電粒子の $|\beta_i|$ よりもずっと大きい. そのため, 電気伝導度では通常電子の寄与が主で $\sigma_C \simeq en_e |\beta_e|/B$ となる.

磁場に垂直な電流密度の成分は, (6.37) 式の磁場に垂直な成分

$$\mathbf{E}' + \mathbf{u}'_i \times \mathbf{B} - \frac{B}{\beta_i} \mathbf{u}'_i = 0 \quad (6.42)$$

から求まる. この式と \mathbf{B} との外積をとると, $(\mathbf{u}'_i \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{u}'_i B^2$ であるので

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B} - B^2 \mathbf{u}'_i - \frac{B}{\beta_i} (\mathbf{u}'_i \times \mathbf{B}) = 0 \quad (6.43)$$

となる. (6.42), (6.43) 式から $\mathbf{u}'_i \times \mathbf{B}$ を消去することで, \mathbf{u}'_i の表式を次のように得る.

$$\mathbf{u}'_i = \frac{\beta_i}{B(1 + \beta_i)} \mathbf{E}' + \frac{\beta_i^2}{B^2(1 + \beta_i)} \mathbf{E}' \times \mathbf{B}. \quad (6.44)$$

これより, 電流密度の磁場に垂直な成分 \mathbf{j}' は

$$\mathbf{j}' = \sum_i q_i n_i \mathbf{u}'_i = \sigma_{\perp} \mathbf{E}' - \frac{\sigma_H}{B} \mathbf{E}' \times \mathbf{B} \quad (6.45)$$

と書くことができる。ここで係数 σ_{\perp} , σ_{H} は電気伝導度 σ_{C} と同じ次元をもち

$$\sigma_{\perp} = \frac{1}{B} \sum_i \frac{q_i n_i \beta_i}{1 + \beta_i^2}, \quad \sigma_{\text{H}} = -\frac{1}{B} \sum_i \frac{q_i n_i \beta_i^2}{1 + \beta_i^2} \quad (6.46)$$

で与えられる。この式を \mathbf{E}' について解くには、(6.42) 式から (6.44) 式を出したのと同様な操作をすればよい。その結果次式を得る。

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\text{H}}^2} \left(\sigma_{\perp} \mathbf{j}' + \frac{\sigma_{\text{H}}}{B} \mathbf{j}' \times \mathbf{B} \right). \quad (6.47)$$

以上得られた平行成分 (6.40) と垂直成分 (6.47) を合わせて、結局電場は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma_{\text{C}}} \mathbf{j} + \frac{\eta_{\text{H}}}{B} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\eta_{\text{A}}}{B^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (6.48)$$

と書くことができる³²。ここで新たな係数 η_{H} と η_{A} は次式で与えられる。

$$\eta_{\text{H}} = \frac{\sigma_{\text{H}}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\text{H}}^2}, \quad \eta_{\text{A}} = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\text{H}}^2} - \frac{1}{\sigma_{\text{C}}}. \quad (6.49)$$

ここまで中性粒子が静止している系で考えてきた。これは、中性粒子が流体の大部分の質量を担っているので流体の静止系でもある。流体が速度 \mathbf{v} をもつ系における電場は

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\sigma_{\text{C}}} \mathbf{j} + \frac{\eta_{\text{H}}}{B} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\eta_{\text{A}}}{B^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (6.50)$$

と得られる。これが **一般化されたオームの法則** である。右辺第3項は**ホール効果**による項で第4項は**両極性拡散**の項である。さらに (6.50) 式を用いることで、ホール効果と両極性拡散をも含む **一般化された磁場の誘導方程式** が次のように求まる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_{\text{C}}} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\eta_{\text{H}}}{\mu_0 B} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\eta_{\text{A}}}{\mu_0 B^2} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (6.51)$$

最後に、ホール効果や両極性拡散がどのような状況下で効果的になるかをみておこう。そのため、 η_{H} , η_{A} 等のホール効果と両極性拡散の各係数の大きさを見積る。これらの係数は各荷電粒子の存在度とホールパラメータ β_i の値によって決まる ([6.46] 式参照)。上で述べたように、各ホールパラメータの絶対値は中性粒子の数密度（または密度）に反比例し、密度の低下により増加する。さらに、電子の $|\beta_e|$ は他の荷電粒子の $|\beta_i|$ に比べて大きい。これらより、弱電離ガスの密度低下に伴い、各ホールパラメータの値は次のように変遷する。(i) すべての荷電粒子で $|\beta_i| \ll 1$, (ii) $|\beta_e| \gg 1$ かつ、他の荷電粒子で $|\beta_i| \ll 1$, (iii) すべての荷電粒子で $|\beta_i| \gg 1$ 。これら3つの場合に対しホール効果と両極性拡散の各係数の大きさを調べる。

(i) すべての荷電粒子で $|\beta_i| \ll 1$ である場合

これは流体ガスの密度が十分高いときに対応する。この場合、 σ_{H} と σ_{\perp} の値は電子の寄与で決まり、これらの定義式 (6.46) で分母 $1 + \beta_i^2$ はほぼ1となり、 σ_{\perp} は σ_{C} と等しくなる。また、比 $\sigma_{\text{H}}/\sigma_{\text{C}}$ は $|\beta_e|$ であり小さい。その結果、係数 η_{H} , η_{A} は $1/\sigma_{\text{C}}$ よりも小さ

³² $\mathbf{j}' \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ および $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{j}' B^2$ に気をつける。

く，一般化されたオームの法則 (6.50) や誘導方程式 (6.51) で，ホール効果と両極性拡散の各項はオーム散逸の項に比べ無視することができる。

(ii) $|\beta_e| \gg 1$ かつ，他の荷電粒子で $|\beta_i| \ll 1$ である場合

これは (i) の場合に比べ低密度であるが (iii) よりは高密度という場合である。この場合は定義式 (6.46) で，電子の項の分子は β_e^2 と大きくなり， $\sigma_H \simeq en_e/B$ となる。これは σ_C の $1/|\beta_e|$ の大きさである。また σ_\perp は σ_H よりも小さい。その結果，係数間の関係は $\eta_H \gg 1/\sigma_C, \eta_A$ となる。すなわち一般化されたオームの法則と誘導方程式において，ホール効果の項がオーム散逸や両極性拡散の項よりも大きくなる³³。

(iii) すべての荷電粒子で $|\beta_i| \gg 1$ である場合

これは磁場が強くガスが十分低密度な場合である。この場合， σ_H の分母分子の β_i^2 が打ち消し合い，さらに電気的中性の条件から σ_H は $O(\beta_i^{-2})$ 程度にまで小さくなる。一方 σ_\perp は $O(\beta_i^{-1})$ である。したがって (iii) では $\eta_A \gg \eta_H \gg 1/\sigma_C$ となり，両極性拡散の項が卓越する。その結果，実効的に磁場に垂直な方向では電気伝導度が極めて小さくなる。電気伝導度の低下は磁場による荷電粒子のエピサイクル運動により電流が流れにくくなるためである。この場合中性粒子との衝突が電気伝導を助ける。電気伝導度 σ_\perp はエピサイクル振動数が小さいイオンなどの重い荷電粒子で決まり， $\sigma_\perp = q_i n_i / (\beta_i B) = m_i n_i / (\tau_i B^2)$ となる。

³³磁場が変化するのに比べ $\eta_H/B = 1/(en_e)$ が定数とみなせる場合，誘導方程式でホール効果の項は磁場に垂直となるため，この場合でもホール効果の項は磁気エネルギーの変化には効かない。

7 円盤天体の力学

7.1 基礎方程式

(a) 宇宙における円盤天体

重力により収縮する天体は、その角運動量を磁場などで外部に効率よく渡すことができない場合には、慣性モーメントの減少によって必然的に高速で回転するようになる。そして、遠心力と重力がおおよそ釣り合うほどまでに回転速度が大きくなると、天体は円盤形状となる。円盤天体には例えば次のようなものがある。

- 銀河 = バルジ + 銀河円盤 + ハロー
- 降着円盤：ブラックホール降着円盤，原始惑星系円盤など

(b) 2次元円盤に対する基礎方程式

- 2次元近似（薄い円盤を仮定，鉛直構造については後述）

$$\text{面密度 } \Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz, \quad \text{2次元圧力 } P = \int_{-\infty}^{\infty} p dz, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (7.1)$$

- 連続の式 (2次元極座標 (r, ϕ))

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Sigma v_\phi) = 0. \quad (7.2)$$

- オイラー方程式 (2次元)³⁴

$$r \text{成分: } \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM_c}{r^2} - \frac{\partial \Phi_D}{\partial r}. \quad (7.3)$$

$$\phi \text{成分: } \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{r \Sigma} \frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_D}{\partial \phi}. \quad (7.4)$$

ここで M_c は中心天体の質量， Φ_D は円盤の重力ポテンシャルである。

- 円盤重力のポアソン方程式 (3次元)

$$\Delta \Phi_D = 4\pi G \Sigma \delta(z) \quad (7.5)$$

- 状態方程式

$$P = K' \Sigma^{\gamma'} \quad (\text{等温の場合 } \gamma' = 1). \quad (7.6)$$

問題 35. 連続の式 (7.2) とオイラー方程式の ϕ 成分 (7.4) から，重力を考慮した角運動量保存の式を導出せよ。(円盤重力は外力として扱ってよい.)

³⁴2次元極座標では $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ に付加項 $-e_r v_\phi^2/r + e_\phi v_r v_\phi/r$ が現れる。速度ベクトルが基底ベクトルを用いて $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi$ と表され， $\mathbf{grad} = (\partial/\partial r, 1/r \partial/\partial \phi)$ はこれら基底ベクトルにも作用することに注意して，かつ $\partial \mathbf{e}_r / \partial \phi = \mathbf{e}_\phi$, $\partial \mathbf{e}_\phi / \partial \phi = -\mathbf{e}_r$ を用いれば，これらの付加項を得ることができる。

(c) 円盤の鉛直構造

- 薄い円盤に対し，鉛直方向の静水圧方程式はオイラー方程式の z 成分より

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\Omega'^2 z \quad (7.7)$$

と書ける．ここで，鉛直方向の角振動数 Ω' は次式で定義される．

$$\Omega'^2 = \frac{GM_c}{r^3} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial z^2}(z=0). \quad (7.8)$$

円盤重力が無視できる場合， Ω' はケプラー角速度 $(GM_c/r^3)^{1/2}$ に等しい．

- 円盤密度の鉛直分布は，静水圧方程式 (7.7) を解くことで得ることができる．鉛直方向に等温の場合は

$$\rho(z) = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi h}} e^{-z^2/2h^2} \quad (7.9)$$

となる．鉛直方向のスケールハイト h は次式で与えられる．

$$h = \frac{c_s}{\Omega'}. \quad (7.10)$$

このとき音速 c_s は $\gamma = 1$ の等温音速である．ポリトロープの場合は

$$\rho(z) = \rho(0) \left(1 - \frac{(\gamma-1)z^2}{2h^2} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (7.11)$$

となる．この場合も h は (7.10) 式で与えられるが，そこでの音速には $z=0$ の値を用いる．

- 2次元円盤近似の基礎方程式から得られる流れにおいて，その特徴的長さがスケールハイト h より十分長い場合には2次元近似は妥当だといえる．しかし，円盤における局所的な現象ではしばしば h が特徴的な長さとなる．その場合この近似で結果が変わりうるが，同程度であるので誤差はオーダー1程度であり大きく変わることはないと考えられる．さらに，流れの特徴的長さが h よりも大幅に短いような現象においては2次元円盤近似は妥当ではない．

問題 36. 鉛直密度分布の式 (7.9) および (7.11) を導出せよ．

問題 37. ポリトロープの関係 (1.25) が成り立ち， $\gamma > 1$ である場合，円盤鉛直分布 (7.11) などを積分し得られる面密度 Σ と2次元圧力 P の間にも同様なべきの関係 (7.6) が成り立つことを示し，(7.6) 式のべき γ' と γ との関係を求めよ．

(ヒント: まず，面密度 Σ と2次元圧力 P がそれぞれ $\rho(0)$ の何乗に比例するかを求める.)

7.2 円盤天体の自己重力不安定性

前節の2次元円盤近似の基礎方程式(7.2)-(7.6)を用いて線形安定性解析を行い、円盤天体の自己重力不安定性を調べることができる。ここでは、特に局所的な自己重力不安定性について調べる。

(a) 摂動量

各量を非摂動量(添字0)と摂動量(添字1)とに分けて表す。

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_0 + \Sigma_1, & P &= P_0 + P_1 \quad (P_1 = c_s^2 \Sigma_1), \\ v_r &= v_{r,1}, & v_\phi &= r\Omega(r) + v_{\phi,1}, & \Phi_D &= \Phi_{D,0} + \Phi_{D,1}\end{aligned}$$

ここで、 $c_s^2 = \gamma' K' \Sigma_0^{\gamma'-1}$ である。非摂動状態としての円盤回転角速度 Ω は、遠心力と重力、圧力の釣り合いより

$$\Omega^2 = \frac{GM_c}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{D,0}}{\partial r}(z=0) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} \quad (7.12)$$

で与えられる。ここで、 $H_0 = \frac{\gamma'}{\gamma'-1} P_0 / \Sigma_0$ は非摂動のエンタルピーである。回転角速度 Ω は一般に r に依存する。ケプラー回転では $\Omega \propto r^{-3/2}$ 、銀河円盤では $\Omega \propto 1/r$ である。 Ω が r に依存する回転は差動回転、依存しない回転は剛体回転と呼ばれる。

(b) WKB 近似

ここでは、動径方向の波数が十分大きい摂動のみを考える。この場合非摂動量は波長程度の距離で定数とみなすことができるので

$$\text{摂動量} \propto \exp(ikr + im\phi - i\omega t), \quad (7.13)$$

と書いて、さらに摂動量の微分に対し

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \right| \gg \frac{1}{r} \left| \frac{\partial}{\partial \phi} \right|, \quad \frac{1}{r} \quad (7.14)$$

と近似できる。上の近似では、動径方向の波数が ϕ 方向の波数よりも大きいことを仮定している。差動回転する円盤において波は ϕ 方向に引き伸ばされるので、この仮定は妥当なものである。

(c) 摂動のポアソン方程式の鉛直積分

WKB 近似により、ポアソン方程式(7.5)の摂動方程式は次式のようにになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_{D,1} = 4\pi G \Sigma_1 \delta(z). \quad (7.15)$$

これを $z = -\epsilon$ から $+\epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) まで z で積分し、上下対称性を考慮すると

$$\left(\frac{\partial \Phi_{D,1}}{\partial z} \right)_{z=+\epsilon} = - \left(\frac{\partial \Phi_{D,1}}{\partial z} \right)_{z=-\epsilon} = 2\pi G \Sigma_1. \quad (7.16)$$

を得る. さらに, $z \neq 0$ で (7.15) 式は, $(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\Phi_{D,1} = 0$ となるので

$$\Phi_{D,1} \propto e^{-k|z|} \exp(ikr + im\phi - i\omega t). \quad (7.17)$$

を得る. よって, (7.16), (7.17) 式より次式を得る

$$\Phi_{D,1}(z=0) = -2\pi G\Sigma_1/k. \quad (7.18)$$

(d) その他の摂動方程式と分散関係

- 連続の式

$$i(m\Omega - \omega)\Sigma_1 + ik\Sigma_0 v_{r,1} + \frac{im\Sigma_0}{r}v_{\phi,1} = 0. \quad (7.19)$$

- オイラー方程式

$$\begin{pmatrix} i(m\Omega - \omega) & -2\Omega \\ -2B & i(m\Omega - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{r,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik \\ -im/r \end{pmatrix} \left(\frac{c_s^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} + \Phi_{D,1} \right) \quad (7.20)$$

これを解くと次式を得る.

$$\begin{pmatrix} v_{r,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (m\Omega - \omega)k \\ -i2Bk \end{pmatrix} \left(\frac{c_s^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} + \Phi_{D,1} \right). \quad (7.21)$$

ここで

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2r} \frac{d(r^2\Omega)}{dr} \quad (\text{オールトの定数}), \\ \Delta &= \kappa^2 - (m\Omega - \omega)^2, \\ \kappa^2 &= -4B\Omega \quad (\text{エピサイクル振動数}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

- (7.18), (7.21) 式を (7.19) 式に代入すると

$$\left(1 + \frac{c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k}{\Delta} \right) \Sigma_1 = 0. \quad (7.23)$$

すなわち, 次の分散関係を得る

$$(m\Omega - \omega)^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k + \kappa^2. \quad (7.24)$$

(e) 安定条件

- 振動数 ω が実ならば摂動は安定である. そのためには, 分散関係の右辺がすべての k に対し正である必要がある. すなわち, 「 $\kappa^2 > 0$ 」と「右辺=0の判別式が負」の2つが成り立つことが安定条件となる. 前者は, 比角運動量 l , ($= r^2\Omega$) が r とともに増大することを要請し, 回転流に対する **Rayleigh の安定条件** と呼ばれるものである. 後者からは **Toomre の安定条件**

$$Q \equiv \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} > 1 \quad (7.25)$$

を得る. Q は **Toomre の Q 値** と呼ばれる.

- $Q = 1$ における臨界不安定波長は

$$\lambda_{\text{crit}} = 2\pi/k_{\text{crit}} = 2\pi c_s/\kappa \quad (7.26)$$

となる。3つの角振動数 κ, Ω, Ω' は同程度の大きさなので、臨界不安定波長は円盤の厚さ h と同程度である。よって、円盤の厚みの効果により Toomre の安定条件は多少変わる可能性がある。一方、薄い円盤では λ_{crit} は円盤半径に比べて十分に短いので WKB 近似はよい近似となっている。

- ここでの解析だけでは、波長が円盤半径程度であるような摂動に対する不安定性を知ることはできない。自己重力不安定によるそのような global な摂動の励起を調べた研究によると、 $Q \sim 1$ で2本腕の渦状腕が励起されることが示されている。すなわち、global な摂動に対しても、Toomre の Q 値は自己重力不安定性のよい指標である。

問題 38. 太陽近傍での銀河円盤の Q 値 銀河中心から 8kpc 離れた太陽近傍における恒星と星間ガスを合わせた密度は 0.1 太陽質量 /pc³ 程度と見積られている。銀河円盤の面密度 Σ はこの密度と厚さ h の積でおおよそ見積ることができる。銀河円盤の回転の速度を 200km/sec とし、 $\Omega' = \kappa$ と近似して、太陽近傍での銀河円盤の Q 値を見積れ。(太陽質量は 2×10^{30} kg, 1pc = 3×10^{16} m.) 見積りの結果 $Q \sim 1$ となる。これより銀河円盤の渦状構造は重力不安定によってつくられていると考えられる。

問題 39. 原始惑星系円盤の Q 値 原始惑星系円盤の温度は中心の恒星からの輻射で決まっており太陽周りの円盤では $T = 300(r/1\text{AU})^{-1/2}$ K くらいである。また、太陽系をつくった円盤の面密度は 1AU で 2000 g/cm² と想定されている。1AU での音速を求めて、原始惑星系円盤の 1AU での Q 値を見積れ。また 100AU (典型的な円盤半径) で $Q = 1$ となっている円盤のそこでの面密度 $\Sigma_{100\text{AU}}$ を求め、 $M_d = \Sigma_{100\text{AU}} \times \pi(100\text{AU})^2$ で、その臨界不安定である円盤の質量を見積れ。

7.3 降着円盤の進化と構造

(a) 仮定

- 降着円盤は乱流粘性による角運動量輸送によって進化する (Lynden-Bell and Pringle 1974)
- 乱流粘性の α モデル

$$\nu = \alpha c_s h. \quad (7.27)$$

乱流源としては磁気回転不安定 ($\alpha \lesssim 0.01$) や自己重力不安定 ($\alpha \sim 0.1$) が有望。最大渦の大きさは $\sqrt{\alpha}h$ で最大渦の速度は $\sqrt{\alpha}c_s$ 。

- 自己重力や磁場は考えない。外部からの円盤へのガス降着はない。円盤風もない。
- 回転角 ϕ 方向に平均化し、軸対称円盤の降着進化を考える。

(b) 2次元降着円盤の進化方程式

- 連続の式 (2次元軸対称)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0. \quad (7.28)$$

- 角運動量保存の式

降着円盤では運動方程式に粘性応力を含める必要がある。オイラー方程式 (7.4) に粘性項を加えたナビエ Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \left(\frac{GM_c}{r} \right) + \text{div} \Pi' \quad (7.29)$$

と表される。ここで Π' は粘性応力テンソルで

$$\Pi'_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.30)$$

で与えられる。 ν は動粘性係数 (または粘性拡散係数) である。このナビエ Stokes 方程式の ϕ 成分は、2次元軸対称の円盤に対して

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \Pi'_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\Pi'_{r\phi}}{r} \right) \quad (7.31)$$

となる³⁵。同様に、粘性応力の R, ϕ 成分 $\Pi'_{r\phi}$ は軸対称の場合

$$\Pi'_{r\phi} = \Sigma \nu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \Sigma \nu r \frac{d\Omega}{dr}. \quad (7.32)$$

と与えられる。(7.31) 式と連続の式 (7.28) より、角運動量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma j) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma j v_r - r^2 \Pi'_{r\phi}) = 0. \quad (7.33)$$

を得る。ここで、 $j = r^2 \Omega$ は比角運動量であり、回転角速度は (7.12) 式における主に遠心力と中心天体重力との釣り合いで決まる。さらに、(7.33) に (7.32) 式を代入して次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma j) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{r \Sigma j v_r}_{\text{質量輸送に伴う角運動量流束}} \quad \underbrace{-r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr}}_{\text{差動回転円盤における粘性による角運動量流束}} \right) = 0. \quad (7.34)$$

- $\partial j / \partial t = 0$, (7.28), (7.34) 式より、 v_r と質量降着率 \dot{M} (内側への質量流束) は

$$\dot{M} \equiv -2\pi r \Sigma v_r = -\frac{2\pi}{(dj/dr)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} \right). \quad (7.35)$$

³⁵(7.31) 式右辺の粘性項の付加項は、64 ページの脚注と同様に粘性応力に付随する基底ベクトルの ϕ 微分から生じる。(7.32) 式の粘性応力の表式における付加項も同様である。

- これを (7.28) 式に代入すると、面密度 Σ に対する進化方程式を得る。

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(dj/dr)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} \right) \right] = 0. \quad (7.36)$$

(c) 定常降着円盤の解

$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0$ となる解を求める。 (7.36), (7.34) 式より

$$\dot{M} = \text{定数}, \quad (7.37)$$

$$\dot{J} \equiv j\dot{M} + 2\pi r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr} = \text{定数}. \quad (7.38)$$

である。 \dot{J} は内側への角運動量流束である。中心へ質量降着する円盤で \dot{M} は正で円盤質量の減少率 $|\dot{M}_d|$ に等しい。そのような降着円盤の面密度は (7.38) 式より

$$\Sigma = -\frac{j\dot{M} - \dot{J}}{2\pi \nu r^3 (d\Omega/dr)}. \quad (7.39)$$

さらに、内側境界条件として $\Sigma(r_{in}) = 0$ を採用すると、 $\dot{J} = \dot{M} j(r_{in}) (> 0)$ となり

$$\Sigma = -\frac{\dot{M}}{2\pi \nu r^3 (d\Omega/dr)} [j(r) - j(r_{in})]. \quad (7.40)$$

を得る。特に、ケプラー回転 ($\Omega \propto r^{-3/2}$) の定常降着円盤では

$$\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi \nu} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}} \right). \quad (7.41)$$

(d) 自己相似解

円盤回転角速度が $\Omega \propto r^{-\beta}$ 、乱流粘性が $\nu = \nu_0 r^\gamma$ とそれぞれ r のべき関数である場合を考える (Kepler 回転円盤では $\beta = 3/2$ 、林円盤温度で α が一定の場合 $\gamma = 1$)。このとき、微分方程式 (7.36) は次のような自己相似解をもつ (Lynden-Bell & Pringle 1974; Hartmann et al. 1998; 7.4 の Appendix も参照)

$$\Sigma(r, t) = \frac{|\dot{M}_d|}{2\pi \beta \nu} \exp \left[-\left(\frac{r}{R_d(t)} \right)^{2-\gamma} \right]. \quad (7.42)$$

ここで、円盤半径 $R_d(t)$ は

$$R_d(t) = \left[\frac{\beta(2-\gamma)^2}{2-\beta} \nu_0 t \right]^{\frac{1}{2-\gamma}}. \quad (7.43)$$

で定義される。この自己相似解では円盤内縁半径に対し $r_{in} \ll r, R_d$ が仮定されており、 $\dot{J} \rightarrow 0$ で円盤の全角運動量 J_d は保存する。 $r_{in} \ll r \ll R_d$ という半径 r では、

自己相似解 (7.42) と 定常降着円盤の解 (7.40) は一致する. さらに, 円盤質量 $M_d(t)$ とその時間微分は, 円盤角運動量 J_d を用いて次式で与えられる.

$$M_d = \frac{J_d}{\Gamma(b)R_d^2\Omega(R_d)} \propto t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}, \quad \dot{M}_d = -\frac{2-\beta}{2-\gamma} \frac{M_d}{t} \quad \left(b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1 \right). \quad (7.44)$$

ここで, $\Gamma(b)$ はガンマ関数である. また, 質量降着率 (円盤内側への質量流束) \dot{M} は

$$\dot{M} = -2\pi r \Sigma v_r = 2\pi\beta\nu\Sigma \left[1 - \frac{2-\gamma}{2-\beta} \left(\frac{r}{R_d} \right)^{2-\gamma} \right]. \quad (7.45)$$

円盤の進化時間は $\gamma = 1, \beta = 3/2$ の場合

$$t_d \simeq \frac{R_d^2}{3\nu(R_d)} \simeq \frac{1}{3\alpha\Omega(R_d)} \left(\frac{R_d}{h} \right)^2. \quad (7.46)$$

と見積もられる. 原始惑星系円盤で $\alpha = 10^{-3}$ とすると, 円盤半径 100AU に対し ($R_d/h \simeq 10$ で) t_d は 5 百万年程度となり円盤寿命の観測値とおおよそ合う.

(e) 粘性加熱で決まる円盤温度

- 粘性加熱率 ϵ (単位質量当たり) (e.g. ランダウリフシッツ 「流体力学」)

$$\epsilon = \nu \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2. \quad (7.47)$$

- 表面温度

$$2\sigma T_s^4 = \Sigma\nu \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2. \quad (7.48)$$

ケプラー回転円盤において, $r \gg r_{in}$ では

$$T_s = \left(\frac{3\Omega^2 \dot{M}}{8\pi\sigma} \right)^{1/4} \propto r^{-3/4}. \quad (7.49)$$

原始惑星系円盤において $\alpha = 10^{-3}$, $\Sigma = 2000\text{g/cm}^2$ とすると, 1AU で $T_s \simeq 100\text{K}$ となる.

- 円盤内の鉛直温度構造:

z 方向の温度構造を求める. 熱輸送は輻射によるものとし, 拡散近似が適用できるものとする. また, 乱流粘性による加熱源は円盤中心面に局在していると簡単化すると

$$\frac{d}{dz} \left(-\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz} \right) = \nu\Sigma \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2 \delta(z). \quad (7.50)$$

(7.50) 式を円盤中心面近傍で z 方向に積分し, 中心面对称を考慮して, さらに光学的厚さ $\tau_z = \int_z^\infty \kappa\rho dz$ を導入すると, ケプラー回転円盤の $z > 0$ で

$$\frac{4}{3} \frac{d}{d\tau_z} (\sigma T^4) = \sigma T_s^4 \quad (7.51)$$

を得る。円盤表面境界条件として、 $\tau_z = 2/3$ で $T = T_s$ とすると、温度分布は次式のように得られる。

$$T(z) = \left(\frac{3}{4}\tau_z + \frac{1}{2} \right)^{1/4} T_s. \quad (7.52)$$

円盤中心面の温度は $(3\tau_{z=0}/4)^{1/4}T_s$ で与えられる。但し、 $\tau_{z=0}$ は中心面の光学的厚さで $\tau_{z=0} \gg 1$ とした。

問題 40. 加熱源が鉛直方向に分布していて、単位体積当たりの加熱率が円盤ガス密度に比例し、かつ $\kappa = \text{一定}$ の場合に対して、円盤内の鉛直温度分布を求め、円盤中心面 ($z = 0$) での温度は $\tau_{z=0} \gg 1$ の場合 $(3\tau_{z=0}/8)^{1/4}T_s$ となることを示せ。

7.4 Appendix 降着円盤の自己相似解の導出

(a) 次元解析による円盤各量の見積りと自己相似解

- 仮定

$$\nu(r) = \nu_0 r^\gamma, \quad \Omega(r) = \Omega_0 r^{-\beta}. \quad (7.53)$$

上式で ν_0, Ω_0 は定数で $\gamma < 2$ とする。ケプラー回転円盤では $\beta = 3/2$ 。

- 特徴的な円盤半径 R_c (円盤質量の大部分を含む範囲) は、円盤が粘性拡散で広がることから $t = R_c^2/\nu(R_c)$ (粘性拡散時間) により決まる。よって

$$R_c = (\nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}}. \quad (7.54)$$

- 円盤が広がる速度や降着速度の特徴的な値

$$v_{r,c} \sim R_c/t \sim \nu(R_c)/R_c. \quad (7.55)$$

- 円盤全角運動量の保存

$$J_d = \int_0^\infty j \Sigma 2\pi r dr = \text{const.} \quad (7.56)$$

- 円盤全質量 M_d

$$M_d = \int_0^\infty \Sigma 2\pi r dr \sim \frac{J_d}{j_c} \sim \frac{J_d}{R_c^2 \Omega(R_c)} \propto t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}. \quad (7.57)$$

- 円盤面密度の特徴的な値

$$\Sigma_c = \Sigma(R_c(t), t) \sim \frac{J_d}{j_c R_c^2} \sim \frac{J_d}{R_c^4 \Omega(R_c)} \propto t^{-\frac{4-\beta}{2-\gamma}}. \quad (7.58)$$

- 無次元変数 y

$$y = \frac{r^2}{\nu t} = \frac{r^{2-\gamma}}{\nu_0 t} = \left(\frac{r}{R_c} \right)^{2-\gamma}. \quad (7.59)$$

- 円盤面密度分布の自己相似解

上の見積りは円盤面密度の空間分布が任意の時間で相似的であることを仮定しているが、実際そのような自己相似解が存在する。自己相似解はただ1つの無次元変数 y の関数で表される。面密度の特徴的な値が (7.58) 式と書かれているので、面密度の自己相似解を次の形に表す。

$$\Sigma(r, t) = \frac{J_d}{r^{4\Omega}} f(y). \quad (7.60)$$

自己相似解 $f(y)$ は連続の式と角運動量保存の式に (7.60) 式を代入することでも求まるが、以下ではより簡単な方法を紹介する。

(b) 角運動量保存による自己相似解の積分

角運動量分布の積分形（積算分布または累積分布）は

$$J(r) = \int_0^r j \Sigma 2\pi r dr. \quad (7.61)$$

r と y の関係式

$$r(y) = (y\nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}} \quad (7.62)$$

を用いて、積算分布を y の関数 $J(r(y))$ で表すと、この y に対する分布は自己相似性より時間に依らない。

$$\frac{d}{dt} J(r(y)) = 0. \quad (7.63)$$

一方、実際に左辺を $y = \text{一定}$ での時間微分であることに気をつけて書き下すと

$$\frac{d}{dt} J(r(y)) = \int_0^{r(y)} \frac{\partial(j \Sigma)}{\partial t} 2\pi r dr + j \Sigma 2\pi r \frac{dr(y)}{dt}. \quad (7.64)$$

これが0に等しい。右辺第1項は角運動量保存の式 (7.34) を用いると容易に積分でき、第2項は (7.62) 式を用いて微分し計算すると、結局次の速度 v_r の表式を得る。

$$v_r = -\beta \frac{\nu}{r} \left[1 - \frac{y}{\beta(2-\gamma)} \right]. \quad (7.65)$$

また、円盤質量降着率 \dot{M} は

$$\dot{M} \equiv -2\pi r \Sigma v_r = 2\pi\beta\nu\Sigma \left[1 - \frac{y}{\beta(2-\gamma)} \right]. \quad (7.66)$$

$y \ll 1$ では、定常降着円盤の \dot{M} (7.40 式) に一致する（但し、 $r \gg r_{in}$ ）。

(c) 関数 f の解

円盤質量降着率 (7.66) は (7.35) 式のようにも書かれていた。両者が等しいとした式を (7.59)、(7.60) 式を用いて変形すると、次の $f(y)$ の方程式を得る。

$$\frac{d \ln f}{dy} = -\frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} + \frac{b}{y} \quad \left(b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1 \right). \quad (7.67)$$

新たな変数

$$x \equiv \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} y = \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} \frac{r^2}{\nu t} = \left(\frac{r}{R_d(t)} \right)^{2-\gamma} \quad (7.68)$$

を用いると,³⁶ 解は

$$f = \frac{2-\gamma}{2\pi\Gamma(b)} x^b \exp(-x) \quad (7.69)$$

と求まる. 右辺の比例定数は円盤全角運動量の式 (7.56) を満たすように決めた.

よって円盤の面密度と全質量, および両者の関係は次のようになる.

$$\Sigma(r, t) = \frac{(2-\gamma)J_d}{2\pi\Gamma(b)\Omega r^4} x^b \exp(-x), \quad (7.70)$$

$$M_d(t) = \int_0^\infty \Sigma 2\pi r dr = \frac{J_d}{\Gamma(b)\Omega(R_d)R_d^2}, \quad \Sigma(r, t) = \frac{|\dot{M}_d|}{2\pi\beta\nu} \exp(-x). \quad (7.71)$$

問題 41. (7.65), (7.67), (7.69) 式を導出せよ.

問題 42. (7.71) の両式を導出せよ.

問題 43. 上で求めた面密度の自己相似解は, 粘性係数のべき指数 γ が 2 よりも大きいと負になり物理的意味のない解となる. $\gamma < 2$ が要請される理由を, $\gamma = 2$ の前後で円盤とその進化の物理的性質がどのように変わるのかを示しつつ説明せよ.

問題 44. 粘性が $\nu = \nu(r, \Sigma) = \nu_0 r^\gamma \Sigma^\delta$ と面密度に依存する降着円盤に対しても, 自己相似解が得られている (Pringle 1974, 1991; Cannizzo et al. 1990). その解を上と同様な方法で求めてみよう. ここでは $\Omega = \sqrt{GM_*/r^3}$ であるケプラー回転円盤を考える.

1. 特徴的な円盤半径 R_c を用い, 特徴的な面密度 Σ_c は $\Sigma_c = J_d/[R_c^4\Omega(R_c)]$ と与えられ, また $R_c^2 = t\nu(R_c, \Sigma_c)$ が成り立つとする. このとき, $R_c(t) = [(J_d/\sqrt{GM_*})^\delta \nu_0 t]^{1/a}$ となることを示せ (cf. [7.54] 式). 但し, $a = 2 - \gamma + \frac{5}{2}\delta$ である.
2. 無次元座標 y を $\Sigma_r \equiv J_d/[r^4\Omega(r)]$ を用いて $y \equiv r^2/[t\nu(r, \Sigma_r)] = [r/R_c(t)]^a$ と定義する (cf. [7.59] 式). r について解くと $r(y) = R_c(t)y^{1/a}$ を得る. このとき自己相似解の性質 $\frac{d}{dt} J(r(y)) = 0$ より, 円盤降着率は次式で与えられることを示せ.

$$\dot{M} = 3\pi\nu\Sigma \left[1 - \frac{2y}{3a} \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_r} \right)^{-\delta} \right]. \quad (7.72)$$

3. 自己相似解を $\Sigma = \Sigma_r f(y)$ と書く. このとき (7.72) と (7.35) 式が等しいことより, f の微分方程式 $\frac{df^\delta}{dy} - A \frac{f^\delta}{y} + B = 0$ を導出せよ. 但し, $A = \frac{1 + \frac{1}{2a}}{1 + \frac{1}{\delta}}$, $B = \frac{1}{3a^2(1 + \frac{1}{\delta})}$.
4. f の微分方程式を解き, (7.56) 式を満たす解が次式で与えられることを示せ.

$$\Sigma = C \frac{J_d}{r^4\Omega} (x^A - x)^{1/\delta}, \quad x = \frac{By}{(1-A)C^\delta}, \quad C = \left[\frac{2\pi}{a} \int_0^1 (x^A - x)^{1/\delta} \frac{dx}{x} \right]^{-1}. \quad (7.73)$$

³⁶ R_d は (7.43) 式で定義されている.

8 相対論的流体力学の基礎

8.1 特殊相対性理論の最小知識

宇宙においては光速に近い速度の流れも存在する。コンパクト天体から噴出する**相対論的ジェット**はその一例である。そのような流れを調べる場合、相対性理論に基づいた流体力学が必要になる。この章では、相対論的流体力学の基礎方程式を導出し、ニュートン力学における流体力学がどのように修正されるのかをみてみよう。相対論的流体力学の基礎方程式を導出する前に、特殊相対論の基礎事項をまず確認しておく³⁷。

(a) 相対性原理とローレンツ変換

アインシュタインの相対性原理は以下の2つの原理からなる。

- **相対性原理**：すべての自然法則はあらゆる慣性系で同一である。これより、真空を伝播する光の速度はどの慣性系から見ても同一でなければならない。
- **速度の上限**：相対性理論において、2つの物体の相互作用は、片方の物体の情報がある有限速度でもう一方の物体に伝播した結果起こる。この伝播速度や物体の速度には上限があり、その上限値が光速である。

ニュートン力学において、時間は基準系にはよらず絶対的なものである。このため、物体の速度および光等の伝播速度は各慣性系によって異なり、相対的な量であった。これに対し相対性理論では、光の伝播速度(光速)を一定とするため絶対的な時間は許されず、各慣性系で異なる時間が用いられる。2つの慣性座標系の時間と空間座標は、**ローレンツ変換**によって互いに変換される。ある慣性座標系 (t, x, y, z) に対し、もう1つの平行な空間軸をもつ慣性系 (t', x', y', z') が x 方向に V で運動している場合、これらの慣性系の間の変換であるローレンツ変換は次式で与えられる。

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.1)$$

このローレンツ変換より、速度 V で運動する棒の長さはそれが静止している場合に比べ $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ だけ収縮すること(ローレンツ収縮)や、運動する時計は静止している時計よりゆっくり進むということが導かれる。

(b) 世界間隔

時間軸を含めた4次元空間において、事象は点(**世界点**)で表される。また、粒子の時々刻々の移動や光の伝播は4次元空間における曲線(**世界線**)で表される。ある慣性基準系で静止した粒子は、4次元空間で時間軸に平行な直線上を運動する。4次元空間における2つの事象 (t_1, x_1, y_1, z_1) , (t_2, x_2, y_2, z_2) の間の距離 s_{12} は、**世界間隔**と呼ばれ

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (8.2)$$

で定義される。2つの接近した事象の世界間隔 ds は次式で与えられる³⁸。

³⁷ここでの説明は最小限に留める。より詳しい内容については特殊相対論の教科書を参照すること。

³⁸世界間隔を $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ と逆符号で定義する流儀もある。

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (8.3)$$

伝播する光の世界線上の2点の世界間隔 ds は、定義より $ds = 0$ となる。このように2つの事象の世界間隔がある慣性基準系で0であるならば、光速度不変の原理から他のすべての慣性系においても0となる。相対性原理よりすべての慣性系は同等であることから、一般に2点の世界間隔 ds は各慣性系で同じ値をとらなければならない。ローレンツ変換はこれを満たす。

(c) 4元ベクトルと共変形式

相対性理論における方程式は4元ベクトル（または4元テンソル）を用いて表すのが便利である。4元テンソルで表された方程式は**共変形式**であるといわれ、ローレンツ変換に対し不変となる。

- 4元ベクトルの例

- 4次元座標ベクトル $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.
(一般に、添字0の成分は時間成分、それ以外は空間成分と呼ばれる。)
- 4次元微小座標間隔ベクトル $dx^i = (cdt, dx, dy, dz)$.
- 電流密度の4元ベクトル $j_e^i = (c\rho_e, \mathbf{j}_e)$. 時間成分は時間軸方向の流束.
- 電磁場の4元ポテンシャル $A^i = (\phi/c, \mathbf{A})$ (SI単位系).

- 世界間隔と計量テンソル

世界間隔 ds を4次元微小座標間隔ベクトルを用いて共変形式で表すと

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (8.4)$$

となる。ここで、 g_{ik} は計量テンソルである。添字 i と k についてはそれぞれ0から3までの和がとられている。直交直線座標系において計量テンソル g_{ik} は対角成分以外は0で、対角成分は以下で与えられる。

$$g_{00} = 1, \quad g_{\alpha\alpha} = -1 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (8.5)$$

- 反変成分と共変成分

4元ベクトルには2つのタイプ、共変成分と反変成分とがある。共変成分を A_i 、反変成分を A^i と添字の上下で区別して表す。上の4元ベクトルの各例は反変成分であった。共変成分の例としては、スカラー ϕ の4次元勾配 $d\phi/dx^i$ がある。(スカラーはローレンツ変換において不変な量である。) 反変成分と共変成分は計量テンソルを介し互いに次式のように関係している。

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (8.6)$$

g_{ik} は計量テンソルの共変成分であり、 g^{ik} は反変成分である。一般に計量テンソルの両成分は互いの逆行列であるが、直交直線座標では両者は等しい。上式のように計量テンソル g_{ik} は添字を上下させる。(8.4)式と同様に、2回くり返された添字 k については0から3までの和がとられており、この和は縮約といわれる。縮約は必ず共変成分の添字と反変成分の添字の組でとられる。

- 4元ベクトルのローレンツ変換

4元ベクトルの反変成分は座標系 x^i から x^i へのローレンツ変換 (8.1) に伴い

$$A^0 = \gamma(A'^0 + VA'^1/c), \quad A^1 = \gamma(A'^1 + VA'^0/c), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3 \quad (8.7)$$

と変換される。ここで、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ はローレンツ因子である。これに対して、共変成分は次式で変換される³⁹。

$$A_0 = \gamma(A'_0 - VA'_1/c), \quad A_1 = \gamma(A'_1 - VA'_0/c), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3 \quad (8.8)$$

共変ベクトルと反変ベクトルの縮約をとった積（スカラー積） $A_i B^i$ はローレンツ変換に対して不変で、スカラーである。

(d) 4元速度ベクトル

4元速度ベクトルの反変成分 u^i は、粒子の世界線に沿った微分を用いて

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (8.9)$$

と定義される⁴⁰。世界間隔 ds の定義より、4元速度ベクトルの自乗は $u_i u^i = 1$ となる。 $v = \sqrt{v_\alpha^2}$ であり、実験室系と流体静止系とのローレンツ因子は $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ とかける。また (8.3) 式より $ds = cdt/\gamma$ と書け、4元速度ベクトルは3次元の速度ベクトル v_α と次式のように関係することがわかる⁴¹。

$$u^0 = \gamma, \quad u^\alpha = v_\alpha \gamma/c \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (8.10)$$

静止質量 m_0 、速度 v_α の粒子の4元運動量は $m_0 c u^i$ で与えられる。4元運動量の時間成分は粒子の（静止エネルギーを含んだ）エネルギーの $1/c$ 倍であり、空間成分は粒子の運動量に等しい。 u^i に含まれるローレンツ因子 γ は慣性質量の増大を示す。

8.2 連続の式

相対論的力学において、粒子の質量はその速度に依存していて保存量ではない。そのため、代わりに流体を構成する粒子の数の保存を連続の式として書き下す⁴²。ニュートン力学において、3次元の粒子数流束密度は $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$ で与えられる。ここで n は粒子数密度である。相対論的力学における粒子数流束密度の4元ベクトル j^i は自然な拡張として

$$j^i = n u^i \quad (8.11)$$

と与えられる。上式を含め一般に相対論的力学において、数密度 n は流体が静止している局所慣性系における単位体積当たりの粒子数と定義されることに注意しよう。流体静止系

³⁹一般的に、互いに任意の方向に運動する2つの慣性系の間では $A^i = (\partial x^i / \partial x'^k) A'^k$, $A_i = (\partial x'^k / \partial x^i) A'_k$ と変換される。このベクトル変換則は一般相対性理論における任意の座標変換に対しても使える。

⁴⁰4元速度ベクトルを ds の代わりに固有時間の微分 $d\tau = ds/c$ を用いて $dx^i/d\tau$ で定義することもある。

⁴¹特殊相対論では、3次元ベクトルの添字はすべて下付きとしギリシャ文字で表すことにする。

⁴²高温状態においては対生成により粒子と反粒子が生成されまた対消滅も起こり、粒子数の合計は保存しない。その場合には粒子と反粒子の数の差が用いられる。この差は対生成や対消滅により変化しない。

で単位体積をもつ部分は、流体が運動している実験室系 (観察者の系) ではローレンツ収縮して $1/\gamma = \sqrt{1-v^2/c^2}$ の体積をもつ。よって、実験室系における数密度は、流体静止系での数密度 n の γ 倍である。4 元粒子数流束密度ベクトルの時間成分は (8.10) 式より $j^0 = n\gamma$ であるが、これは実験室系での数密度に等しい⁴³。同様に空間成分は $j^\alpha = n\gamma v_\alpha/c$ であり、実験室系での 3 次元粒子数流束密度ベクトルの $1/c$ 倍に等しい。

相対論的流体力学における粒子数に関する連続の式は、粒子数流束密度の 4 元ベクトルの 4 次元発散が 0 になるという共変形式で表される⁴⁴。

$$\frac{\partial(nu^i)}{\partial x^i} = 0. \quad (8.12)$$

また、3 次元速度ベクトルを用いた 3 次元形式で表すと、連続の式は

$$\frac{\partial(n\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(n\gamma v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (8.13)$$

となる。実験室系での粒子数密度が $n\gamma$ であるので、連続の式 (8.13) はニュートン力学における式と全く同じものであることが分かる。

8.3 理想流体のエネルギー運動量テンソル

1 章でみたように、流体力学の運動方程式とエネルギー方程式は、それぞれ運動量保存とエネルギー保存に対応している。また、エネルギー保存と運動量保存の式は、エネルギー密度とエネルギー流束密度、および運動量密度と運動量流束密度で表されていた。よって、これらの相対性理論における表式がわかればすぐに保存式を書き下すことができる。ここでは、理想流体に対するこれらの相対論的な表式を導出する。

相対性理論において、エネルギー密度とエネルギー流束密度、および運動量密度と運動量流束密度は、まとめて 4 次元の**エネルギー運動量テンソル** T^{ik} として表される。エネルギー運動量テンソルの成分のうち、 T^{00} はエネルギー密度を与える。成分 $T^{\alpha 0}$ ($\alpha=1,2,3$) の 3 次元ベクトルは、運動量密度ベクトルの c 倍である⁴⁵。さらに、3 次元ベクトル $T^{0\alpha}$ はエネルギー流束密度の $1/c$ 倍、3 次元テンソル $T^{\alpha\beta}$ は運動量流束密度テンソルに等しい⁴⁶。また T^{ik} は対称テンソルである。

理想流体のエネルギー運動量テンソルを、まず流体が静止している慣性系に対して求めよう。流体が静止している場合、運動量密度やエネルギー流束密度は当然 0 である ([1.37] を参照)。また、運動量流束密度テンソルは対角成分以外は 0 で、対角成分は圧力 p で与えられる ([1.19] 式参照)。よって、流体静止系で理想流体のエネルギー運動量テンソルは

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

⁴³これは x^0 軸方向への粒子数の流束の $1/c$ 倍であると考えられる。

⁴⁴(8.12) 式の 4 次元発散が 0 であることは、任意の 4 次元体積に対しそれ横切る各流体粒子の世界線について、体積の表面を内側へ横切り入る本数と外側へ出る本数が等しいことを示している。

⁴⁵これらエネルギーと運動量の密度は実験室系の単位体積当たりの量である。

⁴⁶ j^0 と同様に、成分 T^{i0} は x^0 軸方向のエネルギーや運動量の流束と解釈でき、 T^{ik} は 4 元エネルギー運動量流束テンソルだと言える。

と与えられる。ここで、 e は流体静止系の単位体積あたりの内部エネルギーである。相対性理論における内部エネルギーは流体の静止エネルギーも含んでいることに注意しよう。

任意の基準系における理想流体のエネルギー運動量テンソルの一般的表式も簡単に求まる。任意の慣性系でエネルギー運動量テンソルは4元速度ベクトル u^i の2次の項を持つ。また、それは流体静止系で (8.14) 式と等しくならなければならない、その流体静止系で $u^0 = 1, u^\alpha = 0$ である。以上より、理想流体のエネルギー運動量テンソルの表式は

$$T^{ik} = hu^i u^k - pg^{ik} \quad (8.15)$$

と求まる。ここで、 $h = e + p$ は流体静止系の単位体積あたりのエンタルピーである⁴⁷。この T^{ik} の各成分を (8.10) 式を用いて3次元速度ベクトルで表すと次のようになる⁴⁸。

$$T^{00} = h\gamma^2 - p, \quad T^{\alpha 0} = T^{0\alpha} = h\gamma^2 v_\alpha / c, \quad T^{\alpha\beta} = h\gamma^2 v_\alpha v_\beta / c^2 + p\delta_{\alpha\beta}. \quad (8.16)$$

これらの非相対論的極限 ($v \ll c$) が、ニュートン力学における流体力学の結果と一致することを確認しておこう。ニュートン力学における密度 ρ_{nr} は $m_0 n \gamma$ で与えられる。ここで m_0 は構成粒子の静止質量である。また、非相対論的なニュートン力学における内部エネルギー e_{nr} は静止エネルギーを含まず、相対論的な内部エネルギー e と $e\gamma = \rho_{nr} c^2 + e_{nr}$ という関係にある。これらの式にローレンツ因子 γ が含まれるのは、 ρ_{nr} と e_{nr} が実験系の単位体積あたりの量であるためである。さらに、非相対論的極限においてローレンツ因子は $\gamma = 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2$ と近似できる。以上より $h\gamma^2 = \rho_{nr} c^2 + \frac{1}{2}\rho_{nr} v^2 + e_{nr} + p$ と近似でき、(8.16) 式で $1/c$ の項までを残した非相対論的極限の近似式は次のようになる。

$$T^{00} = \rho_{nr} c^2 + \frac{1}{2}\rho_{nr} v^2 + e_{nr}, \quad T^{\alpha 0} = T^{0\alpha} = (\rho_{nr} c^2 + \frac{1}{2}\rho_{nr} v^2 + e_{nr} + p)v_\alpha / c, \quad (8.17)$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{nr} v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta}.$$

$T^{\alpha\beta}$ は明らかにニュートン力学における運動量流束密度の表式 (1.19) と等しい。 T^{00} は静止エネルギーを含んでいることに注意すれば、これもニュートン力学のエネルギー密度と一致していることがわかる。 $T^{\alpha 0}$ ($= T^{0\alpha}$) は、 c^1 の項までの精度でニュートン力学の運動量密度の c 倍に等しい。 $T^{\alpha 0}$ はエネルギー流束密度でもある。 $T^{\alpha 0}$ が静止エネルギーの移流項も含んでいることに注意すれば、残りの項がニュートン力学のエネルギー流束密度 (の $1/c$ 倍) に対応し、かつ等しいことがわかる ([1.37] 式参照)。

8.4 特殊相対性理論における流体力学方程式

相対論的流体力学におけるエネルギー保存の式と運動量保存の式はエネルギー運動量テンソルの4次元発散が0であるという式、すなわち

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \frac{\partial(hu_i u^k)}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0 \quad (8.18)$$

⁴⁷ この章の相対論的な表式に表れるすべての熱力学量は流体静止系における量である。 n, e, h などの量は流体静止系での単位体積あたりの量である。一方、§8.1の4元ベクトルの例で示した4元電流密度ベクトルの時間成分の電荷密度は実験系の単位体積当たりの量である。

⁴⁸ (8.16) 式は、流体静止系での T^{ik} を流体が運動する実験系へローレンツ変換することによっても導出可能である。ローレンツ変換の際のテンソル変換公式はベクトルの直積の変換公式で与えられる。

で与えられる。\$T_i^k\$ はエネルギー-運動量テンソルの混合成分で \$T_i^k = g_{il}T^{lk}\$ である。この方程式の時間成分がエネルギー保存の式、空間成分が運動量保存の式である。これらを (8.16) 式を用いて 3次元形式で書くと、エネルギー保存の式は

$$\frac{\partial(h\gamma^2 - p)}{\partial t} + \frac{\partial(h\gamma^2 v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (8.19)$$

となり、運動量保存の式は

$$\frac{\partial(h\gamma^2 v_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(h\gamma^2 v_\alpha v_\beta + c^2 p \delta_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} = 0 \quad (8.20)$$

となる。これらの保存式と連続の式 (8.13) が**特殊相対論的流体力学の基礎方程式**である。これら方程式の数は5つで、未知変数の数(熱力学量2つと速度3成分)と一致している⁴⁹。

保存式 (8.18) と連続の式 (8.13) から導かれる方程式について述べておこう。まず、(8.18) 式と \$u^i\$ とのスカラー積をとり、\$u_i u^i = 1\$、\$u_i \partial u^i / \partial x^k = 0\$ に気をつけると

$$\frac{\partial(hu^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0 \quad (8.21)$$

となる。さらに、関係式 \$hu^k = nu^k(h/n)\$ と連続の式 (8.12) を用いて変形すると

$$nu^k \left[\frac{\partial(h/n)}{\partial x^k} - \frac{1}{n} \frac{\partial p}{\partial x^k} \right] = 0 \quad (8.22)$$

を得る。この式は、流体静止系の単位体積あたりのエントロピー \$\sigma\$ についての熱力学的関係式 \$Td(\sigma/n) = d(h/n) - (1/n)dp\$ を用いると

$$u^k \frac{\partial(\sigma/n)}{\partial x^k} = \frac{d(\sigma/n)}{ds} = 0 \quad (8.23)$$

と書ける。これは流れの世界線に沿って1粒子あたりのエントロピーが保存することを示していて、**断熱の式**である⁵⁰。

次に、(8.18) 式の \$u^i\$ に垂直な方向の成分を考える。その方向の方程式は次式で書ける。

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} - u_i u^l \frac{\partial T_l^k}{\partial x^k} = 0. \quad (8.24)$$

これを (8.18), (8.21) 式を用いて変形して、次の**特殊相対論におけるオイラー方程式**を得る。

$$hu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \quad (8.25)$$

定常流における関係式も導いておこう。この場合時間微分が0であるので、連続の式 (8.13) とエネルギー保存の式 (8.19) より、流線に囲まれた流管を横切る粒子数流束とエネルギー流束がそれぞれ一定、すなわち

$$n\gamma v_\alpha dS_\alpha = \text{constant}, \quad h\gamma^2 v_\alpha dS_\alpha = \text{constant} \quad (8.26)$$

である。ここで \$dS_\alpha\$ は流管の断面積(ベクトル)である。これら流束の比も一定なので

$$h\gamma/n = \text{constant}. \quad (8.27)$$

が成り立つ。これが**特殊相対論的流体力学におけるベルヌーイの式**である。

⁴⁹熱力学量 \$p, e, n\$ の間の関係式である状態方程式が存在し、それにより独立な熱力学量は2つである。

⁵⁰この断熱の式と連続の式 (8.12) よりエントロピー保存の式 \$\partial(\sigma u^k)/\partial x^k = 0\$ も得ることができる。

8.5 一般相対性理論における流体力学方程式

8.5.1 共変形式の流体力学方程式

光速程度の速度をもつ流れを変えるほどの強い重力場における流体の記述は、一般相対性理論を用いる必要がある。一般相対性理論は重力と慣性力は同じものだとする等価原理から出発し構築されている。一般相対性理論で重力場は、時空の各点が加速度運動をすることによる慣性力と等価であり、時空の計量テンソル g_{ik} によって表されるのである。重力源によりゆがんだ時空の計量テンソルは、重力場の方程式であるアインシュタイン方程式により決定される。一般に、計量テンソル g_{ik} は対角成分以外も 0 ではなく、各成分の値は 4 次元座標に依存し変化する。

本節では、時空の計量テンソルは与えられているものとし、流体力学方程式の一般相対性理論における修正点について述べる。計量テンソル g_{ik} が与えられている場合には流体力学の方程式を容易に求めることができる。実際、その g_{ik} を用いることで前節までの 4 元テンソルで表した共変形式の方程式はほぼそのまま使うことができる。ただ、ベクトルやテンソルの微分に関しては変更が必要である。

一般相対性理論で用いられる曲線座標系では、共変形式とするために、ベクトルやテンソルの微分に**共変微分**を用いなければならない。例えば、ベクトル A_i , A^i の座標 x^k に関する共変微分は $A_{i;k}$, $A^i_{;k}$ と表記され、それぞれ次式で定義される。

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l, \quad A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A^l. \quad (8.28)$$

ここで、 Γ_{ik}^l は**クリストッフエル記号**で、次式で与えられる⁵¹。

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (8.29)$$

一般に、テンソルの共変微分においては各添字に対してそれぞれクリストッフエル記号の項が付加される。例えば、2 階テンソルの混合成分 T_j^i の共変微分は次式で与えられる。

$$T_{j;k}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^l T_l^i + \Gamma_{lk}^i T_j^l. \quad (8.30)$$

スカラー量の共変微分は、クリストッフエル記号の項を含まず従来の微分と同じである。

このような共変微分を従来の微分の代わりに用いることで、一般相対性理論にも適用可能な共変形式の方程式と拡張することができる。連続の式 (8.12)、エネルギーと運動量の保存の式 (8.18)、およびオイラー方程式 (8.25) は、それぞれ

$$(nu^i)_{;i} = 0, \quad T_{i;k}^k = 0, \quad hu^k u_{i;k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \quad (8.31)$$

となる。一般相対性理論においては、共変微分に含まれるクリストッフエル記号の項が重力の効果を表している。断熱の式 (8.23) はスカラー量の微分なので修正の必要はない⁵²。

⁵¹幾何学的には、クリストッフエル記号はベクトルを平行させた際のその成分の変化を与えるものである。微分は異なる 2 点での差であるが、これを同一点での差とするため、片方を平行移動をする必要がある。

⁵²ニュートン力学でも、重力の有無で断熱の式は影響を受けない。

8.5.2 球対称自己重力天体の静水圧平衡

一般相対性理論における自己重力静水圧平衡の方程式は、オイラー方程式 (8.31) から求まる。静水圧平衡の状態にある天体が静止する系では、 $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}$ である。また静止した天体の自己重力のみを考慮すると、 $g_{0\alpha} = 0$ であり、 $u_\alpha = 0$, $u^0 u_0 = 1$ となる。このような天体は球対称と考えてよいだろう⁵³。このとき、(8.31) 式のオイラー方程式の動径座標 r の成分は次のようになる。

$$-hu^0\Gamma_{r0}^0 u_0 = \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8.32)$$

さらに、(8.29) 式より静的で球対称な場合は $\Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2}g^{00}dg_{00}/dr$ であるので、次式を得る。

$$\frac{1}{h} \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{d \ln g_{00}}{dr}. \quad (8.33)$$

(余談) TOV 方程式の導出

アインシュタイン方程式より dg_{00}/dr を求め、TOV 方程式 (Tolman–Oppenheimer–Volkoff 方程式) を導出してみよう。静的で球対称な重力場において、世界間隔は

$$ds^2 = g_{00}(r) c^2 dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (8.34)$$

と表される。これより、アインシュタイン方程式 $R_k^i - \frac{1}{2}R_l^l \delta_k^i = 8\pi G T_k^i/c^4$ の 00 成分は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{g_{rr}} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G e}{c^4} \quad (8.35)$$

となり、 g_{rr} の微分方程式を得る (§8.8 参照)。これを解いて

$$g_{rr} = - \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (8.36)$$

を得る。 $M(r)$ は半径 r より内側にある質量で (3.5) 式で与えられ、相対論において密度は $\rho = e/c^2$ で与えられることを用いた。 rr 成分の方程式は次式のようなになる (§8.8 参照)。

$$\frac{1}{r^2 g_{rr}} \left(r \frac{d \ln g_{00}}{dr} + 1 \right) + \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G p}{c^4}. \quad (8.37)$$

これを $d \ln g_{00}/dr$ について解いて (8.33), (8.36) 式を用いると TOV 方程式 (4.37) を得る。

8.5.3 静的な重力場における流体力学方程式

(8.31) 式のように、4元テンソルを用いた共変形式で流体の方程式を書き下したが、これらを3次元速度で表す際は注意が必要である。一般相対性理論では4元速度と3次元速度の関係式 (8.10) も修正する必要があるからだ。以下では、簡単のため静的な重力場 ($\partial g_{ik}/\partial x^0 = 0$, $g_{0\alpha} = 0$) における流体運動を考える。

⁵³温度や組成の分布が球対称と仮定すれば密度や圧力の分布も球対称となる。

静的な重力場中においては、3次元速度をその位置での固有時間 $d\tau = \sqrt{g_{00}}dx^0/c$ を用いて定義するのが自然である⁵⁴.

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \quad (8.38)$$

また、3次元速度の共変成分は $v_\alpha = -g_{\alpha\beta}v^\beta$ で定義され⁵⁵、速度の自乗は $v^2 = v_\alpha v^\alpha$ で、ローレンツ因子は $\gamma = \sqrt{1 - v_\alpha v^\alpha/c^2}$ と定義される。その結果、(8.4)式より $ds = cd\tau/\gamma$ と書け、4元速度ベクトルは(8.38)式の3次元速度と次のように関係する (cf. [8.10]式).

$$u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \quad u^\alpha = v^\alpha \gamma/c. \quad (8.39)$$

これを用いて、エネルギー運動量テンソル T^{ik} の各成分を3次元速度で表すと

$$T^{00} = \frac{h\gamma^2 - p}{g_{00}}, \quad T^{\alpha 0} = T^{0\alpha} = \frac{h\gamma^2 v^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}, \quad T^{\alpha\beta} = h\gamma^2 v^\alpha v^\beta/c^2 - pg^{\alpha\beta}. \quad (8.40)$$

となる。ここで、静的な重力場で成り立つ関係式 $g^{00}g_{00} = 1$ を用いた。混合成分は

$$T_0^0 = h\gamma^2 - p, \quad T_0^\alpha = \sqrt{g_{00}} h\gamma^2 v^\alpha/c, \quad T_\alpha^\beta = -h\gamma^2 v_\alpha v^\beta/c^2 - p\delta_\alpha^\beta. \quad (8.41)$$

と得られる。また一般にベクトルと対称テンソルに対する4次元発散は、(8.28)-(8.30)式より計量テンソル g_{ik} の行列式 g を用いて

$$A_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}, \quad A_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl} \quad (8.42)$$

と表すことができる。(8.39)-(8.42)式を(8.31)式の連続の式、エネルギーと運動量の保存の式に用いれば、静的な重力場における3次元形式の流体力学の方程式が得られる。

静的な重力場中の定常流で成り立つ一般相対論におけるベルヌーイの式も出しておこう。前節と同様にして、上で得た3次元形式の連続の式とエネルギー保存の式より、流管を横切る粒子数流束とエネルギー流束が一定という式が得られ、それらの流束の比から

$$\sqrt{g_{00}} h\gamma/n = \text{constant}. \quad (8.43)$$

を得る。弱い重力場の極限では、計量テンソルの成分 g_{00} とニュートン力学の重力ポテンシャル ϕ_g との間には

$$g_{00} = 1 + 2\phi_g/c^2 \quad (8.44)$$

という関係式が成り立つことが知られている⁵⁶。これを用いて、(8.43)式 of 非相対論的極限をとると、ニュートン力学における重力場中のベルヌーイの式(1.32)が得られる。

問題 45. (8.42)式を(8.28)-(8.30)式より導出せよ。但し、計量テンソルの行列式 g は負であり、また行列式の微分は $dg = gg^{ik}dg_{ik}$ と書けることを用いてよい。

問題 46. 上の説明にしたがい(8.43)式を導出せよ。また、この式の非相対論的極限をとり、それがニュートン力学におけるベルヌーイの式に一致することも確かめよ。

⁵⁴この固有時間は流体静止系の固有時間とは異なることに注意しよう。

⁵⁵重力場のない特殊相対論では、直交直線座標系を用いることができ、 $g_{\alpha\alpha} = -1$ で $v_\alpha = v^\alpha$ であり、3次元ベクトルの反変成分と共変成分を区別する必要はない。

⁵⁶この式を一般相対性理論における静水圧方程式(8.33)に代入し、非相対論的極限をとると、§3.1のニュートン力学における静水圧方程式が得られる。

8.6 相対論的流体力学における音波と衝撃波

まず、相対論的流体力学における音波について述べる。§ 2.1 と同様に、一様な流体中の無限小摂動を流体 (局所) 静止系で考える。ここでいう“相対論的”とは、状態方程式が相対論的である場合、すなわち圧力が極めて高く静止エネルギーを含んだ内部エネルギーと同程度の大きさをもつ場合を指している。一方、摂動としての流体速度は小さく、 $\gamma = 1$ とおくことができる。エネルギーと運動量の保存式 (8.19) と (8.20) の、1 次の摂動量のみを残した摂動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = -h \operatorname{div} \mathbf{v}', \quad h \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -c^2 \operatorname{grad} p' \quad (8.45)$$

ここで'のついた量は摂動量を表し、'のない量は非摂動量を表している。これら2つの式より、速度摂動 \mathbf{v}' を消去し、また断熱過程における $p' = (\partial p / \partial e)_s e'$ という関係を用いて、波動方程式 $\partial^2 e' / \partial t^2 = c_s^2 \Delta e'$ が得られ、相対論的流体力学における音速 c_s の表式は

$$c_s = c \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_s} \quad (8.46)$$

となる。非相対論における音速 (2.3) の密度 ρ が e/c^2 で置き換えられている。超相対論的極限 (高エネルギー極限) においては、 $p = e/3$ となり、音速は $c_s = c/\sqrt{3}$ となる。

次に、相対論的流体力学における衝撃波について説明する。§2.3 と同様に、衝撃波面が静止した (局所) 座標系を用いよう⁵⁷。 x 軸を衝撃波面に垂直な方向にとり、不連続面は $x = 0$ におく。衝撃波面の接線方向の流れはなく、流体は x 軸の正の方向に流れているとする。衝撃波面を境にして、 x が負の領域を1、正の領域を2で番号づけると、領域1が衝撃波前面で領域2は後面である。これらの領域の量は添字1, 2で表す。

非相対論の場合と同様に、衝撃波の不連続面を横切る、粒子数流束密度、 $j^x = nu^x$ や運動量流束密度、 T^{xx} 、エネルギー流束密度、 T^{x0} は連続である。これらの量の3次元形式の表式 (8.10), (8.16) を用いると、連続の条件、すなわち、衝撃波が満たすべき条件は3次元形式で次のように書ける⁵⁸。

$$\gamma_1 v_1 / V_1 = \gamma_2 v_2 / V_2 \equiv j, \quad (8.47)$$

$$h_1 \gamma_1^2 v_1^2 / c^2 + p_1 = h_2 \gamma_2^2 v_2^2 / c^2 + p_2, \quad (8.48)$$

$$h_1 \gamma_1^2 v_1 = h_2 \gamma_2^2 v_2, \quad (8.49)$$

ここで、各領域における1粒子あたりの (流体静止系での) 体積 $V_i = 1/n_i$ とローレンツ因子 $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ を用いた。(8.47), (8.48) 式より $\gamma_i v_i$ を消去し j について解くと次式を得る⁵⁹。

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{h_1 V_1^2 - h_2 V_2^2} c^2. \quad (8.50)$$

⁵⁷さらに、局所慣性系を用いることでこの付近で重力を消すことができる。不連続面でも計量は連続。

⁵⁸この章で用いられる h, e は (流体静止系の) 単位体積あたりの量であり、2章の単位質量あたりの h, e とは異なることに再度注意しておく。またこの章では静止エネルギーを含んでいる点でも異なっている。

⁵⁹非相対論的極限では $hV = h/n \simeq m_0 c^2$ であるので、この章で j は粒子数流束、 V は1粒子当たりの体積であることに注意すると、この極限で (8.50) 式はニュートン力学での (2.33) 式に等しいことがわかる。同様に、(8.54) 式は非相対論的極限で (2.35) 式に一致することもわかる。

また (8.47), (8.49) 式より次式も得る.

$$h_1^2 \gamma_1^2 V_1^2 = h_2^2 \gamma_2^2 V_2^2. \quad (8.51)$$

この式に $j = \gamma_i v_i / V_i$ より得られるローレンツ因子のもう 1 つの表式

$$\gamma_i^2 = 1 + j^2 V_i^2 / c^2 \quad (8.52)$$

を用いてローレンツ因子を消去すれば, j^2 についても別の表式を得る.

$$j^2 = \frac{h_2^2 V_2^2 - h_1^2 V_1^2}{h_1^2 V_1^4 - h_2^2 V_2^4} c^2. \quad (8.53)$$

これと (8.50) 式が等しいことから, 以下の熱力学量だけの関係式を得る.

$$p_2 - p_1 = \frac{h_2^2 V_2^2 - h_1^2 V_1^2}{h_2 V_2^2 + h_1 V_1^2}, \quad \text{または} \quad h_1(e_1 + p_2)V_1^2 = h_2(e_2 + p_1)V_2^2. \quad (8.54)$$

この式は, 非相対論における (2.35) 式に対応するものであり, 物質の状態方程式としてエンタルピーを p, V の関数として表し p_2 または V_2 について解けば, p - V 平面における衝撃波断熱曲線を描くことができる. この相対論的流体力学における衝撃波断熱曲線は **Taub の衝撃波断熱曲線** と呼ばれ, (8.54) 式は Taub の衝撃波断熱曲線の式と呼ばれる.

各領域の流体の速度を両側の熱力学量で表すこともできる. 実際, (8.48) と (8.49) 式から単純な式変形により次式を得る⁶⁰.

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}}, \quad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}}. \quad (8.55)$$

弱い衝撃波の極限では, 両側の熱力学量はほぼ等しくなり, v_1 と v_2 は (8.46) 式の音速 c_s に等しくなる. 一方, $e_2/e_1 \gg 1$ である強い衝撃波の極限で, かつ衝撃波後面で $p_2 = e_2/3$ という超相対論的状态方程式が成り立つ場合には, v_1 は光速 c に, v_2 は $c/3$ に近づく.

さらに, 衝撃波両面の流体の速度差 v_{12} は相対論における速度の合成則と (8.55) 式より

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2 / c^2} = c \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_2 + p_1)(e_1 + p_2)}} \quad (8.56)$$

と求まる. 上記の超相対論的な強い衝撃波の極限では v_{12} も光速に近づく.

問題 47. (8.52), (8.53), (8.54) 式をそれぞれ導出せよ.

問題 48. (8.55) 式を導出せよ.

問題 49. 超相対論的な強い衝撃波では, 後面の各量は次式で与えられることを示せ⁶¹.

$$\gamma_2 = \sqrt{9/8}, \quad \gamma_2 n_2 = 3\gamma_1 n_1, \quad e_2 = 3p_2 = 3h_2/4 = 2\gamma_1^2 h_1. \quad (8.57)$$

問題 50. 衝撃波両面間の速度差に対応するローレンツ因子 $\gamma_{12} = 1/\sqrt{1 - v_{12}^2/c^2}$ は $\gamma_{12} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - v_1 v_2 / c^2)$ を満たすことを示せ. (まず $\phi_{12} \equiv \tanh^{-1}(v_{12}/c) = \phi_1 - \phi_2$ を示すとよい.) また, 超相対論的な強い衝撃波では $\gamma_{12} = \gamma_1/\sqrt{2}$ となることも示せ.

⁶⁰これらの導出において, 両側での速度とローレンツ因子を $v_i/c = \tanh \phi_i$, $\gamma_i = \cosh \phi_i$ とおくとよい. また, 双曲線関数の関係式 $\cosh^2 \phi_i - \sinh^2 \phi_i = 1$ にも注意すること. 同様に γ_i の表式も容易に求まる.

⁶¹非相対論的な強い衝撃波では衝撃波前後面の数密度の比 n_2/n_1 に上限があるが, 超相対論的な強い衝撃波では各流体静止系での数密度の比は γ_1 に比例して際限なく増大する.

8.7 超相対論的極限における爆風波

5.3 では、爆風波の非相対論的な解であるセドフ解を紹介した。しかし、爆発が非常に高エネルギーであり、爆風波の流速が光速と同程度である場合は、相対論的流体力学を用いる必要がある。本節では、**超相対論的な爆風波**，すなわち、爆風波の流れの速度が光速に極めて近く、そのローレンツ因子が大きい場合について考えよう。超相対論的極限における爆風波の解は **Blandford-McKee 解** として知られている。ここではその性質を説明する。超相対論的な爆風波は、ブラックホールから発せられた**相対論的ジェット**が星間媒質と衝突し発生する衝撃波の理解に役立つ。

非相対論的なセドフ解の場合と同様に、静止した一様媒質を伝播する球面衝撃波とその後面の断熱的な流れを考える。超相対論的な爆風波では、衝撃波の一様媒質に対する伝播速度はほぼ光速 c であり、その速度で決まるローレンツ因子は 1 に比べ十分大きい⁶²。よって球面衝撃波の半径 R は ct で与えられる。伝播速度は衝撃波と前面の媒質との相対速度であり、前節の v_1 に等しく、対応するローレンツ因子は γ_1 で与えられる。

爆風波の衝撃波後面の数密度 n_2 を求める。爆風波の衝撃波前面の一様媒質の単位体積あたりのエンタルピーを h_1 、粒子数密度を n_1 とする。強い衝撃波後面の各熱力学量は (8.57) 式で与えられるが、これらは流体静止系での値であることに注意が必要である。衝撃波外側の媒質が静止している系から見た衝撃波後面の粒子数密度を n'_2 とすると

$$n'_2 = \gamma_{12} n_2 = 2\gamma_1^2 n_1 \quad (8.58)$$

であり、衝撃波前面に比べてかなり大きくなる。 γ_{12} は前節で定義された、衝撃波前面と後面の速度差に対応するローレンツ因子である。(8.58) 式より、超相対論的な爆風波では衝撃波を通過した媒質は極めて薄い球殻内に密集することがわかる。その球殻の厚さ ΔR は、衝撃波が掃いた媒質が後面の数密度で球殻体積 $4\pi R^2 \Delta R$ に一様に分布すると近似すると、次式で見積もられる。

$$\Delta R \simeq \frac{n_1}{3n'_2} R = \frac{R}{6\gamma_1^2}. \quad (8.59)$$

爆風波が媒質中を伝播していくと、ローレンツ因子 γ_1 は徐々に減少する。その時間進化を調べておこう。球殻内のエネルギー密度 T^{00} は (8.16) 式より $h_2 \gamma_{12}^2$ と見積もられる。これに球殻の体積をかけ (8.57) 式も用いると、爆風波の全エネルギーは $8\pi R^3 h_1 \gamma_1^2 / 9$ と見積もられる。これが爆発エネルギー E に等しいことから、次式を得る。

$$\gamma_1^2 \simeq \frac{9E}{8\pi h_1 R^3} = \frac{9E}{8\pi h_1 c^3 t^3}. \quad (8.60)$$

このような爆風波のローレンツ因子 γ_1 の減少に伴い、衝撃波後面の圧力や数密度、エネルギー密度等は減少し、媒質の密集する球殻の相対的厚さ $\Delta R/R$ は増大していく。

厳密に言うと、(8.60) 式の導出で球殻内のエネルギー密度を衝撃波後面の値で一定としたのは過大評価である。エネルギー密度をより正確に見積ると、 γ_1^2 は (8.60) 式の 2 倍程度となる (Blandford & McKee 1976)。

⁶²一般に相対性理論における爆風波では、方程式系に光速度も含まれるため点源爆風波の問題に 2 つの独立な無次元量が存在する。そのため、セドフ解の場合に行った次元解析による見積りは一般にはできない。

8.8 Appendix 球対称静的重力場におけるクリストッフェル記号とリッチテンソル

本節では、静的な球対称重力場におけるクリストッフェル記号とリッチテンソルを計量テンソルで表した表式を与えておく。静的で球対称な重力場における、球対称座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ に対する計量は対角行列で (8.34) 式で与えられる。すなわち、対角成分の g_{00} と g_{11} はそれぞれ $r(=x_1)$ のみの関数であり、他は以下である。

$$g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g^{ii} = 1/g_{ii} \quad (i \text{ について和はとらない}). \quad (8.61)$$

クリストッフェル記号の各成分は、この計量テンソルを用いて (8.29) の定義式より

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= -\frac{g'_{00}}{2g_{11}}, & \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{g'_{00}}{2g_{00}}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{g'_{11}}{2g_{11}}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{r}{g_{11}}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{r \sin^2 \theta}{g_{11}}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (8.62)$$

と求まる。ここで、ダッシュ' は r についての微分を表す。上記以外のクリストッフェル記号の成分は 0 である。

リッチテンソル R_{ik} は $R_{ik} = \partial \Gamma_{ik}^l / \partial x^l - \partial \Gamma_{il}^k / \partial x^k + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$ で与えられ、今考えている球対称で静的な重力場においては対角行列となる。その各対角成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{g''_{00}}{2g_{11}} + \frac{g'_{00}g'_{11}}{4g_{11}^2} + \frac{g'_{00}{}^2}{4g_{00}g_{11}} - \frac{g'_{00}}{rg_{11}}, \\ R_{11} &= -\frac{g''_{00}}{2g_{00}} + \left(\frac{g'_{00}}{2g_{00}}\right)^2 + \frac{g'_{11}}{2g_{11}} \left(\frac{g'_{00}}{2g_{00}} + \frac{2}{r}\right), \\ R_{22} &= \left(\frac{r}{g_{11}}\right)' + 1 + \frac{r}{g_{11}} \left(\frac{g'_{00}}{2g_{00}} + \frac{g'_{11}}{2g_{11}}\right), \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (8.63)$$

となる。混合成分の対角成分 R_i^i は対応する反変計量テンソルを掛けることで求まる。すなわち、 $R_i^i = g^{ii} R_{ii}$ (i について和はとらない)。スカラー曲率 R はリッチテンソルの混合成分の対角和であり、次式のように求まる。

$$R = -\frac{g''_{00}}{g_{00}g_{11}} + \frac{g'_{00}g'_{11}}{2g_{00}g_{11}^2} + \frac{g'_{00}{}^2}{2g_{00}^2g_{11}} - \frac{2g'_{00}}{rg_{00}g_{11}} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{r}{g_{11}}\right)' + \frac{2}{r^2}. \quad (8.64)$$

これらのリッチテンソルの混合成分とスカラー曲率の表式より、静的で球対称な重力場におけるアインシュタイン方程式の左辺 ((8.35) と (8.37) 式の左辺) が得られる。

索引

- アインシュタイン方程式, 82
- 圧縮性流体, 14
- アルフベン速度, 60
- アルフベン波, 59
- 一様等方性乱流, 34
- 渦粘性率, 37
- 運動量保存の式, 6
 - 磁気流体の —, 57
 - 特殊相対論における —, 80
- 運動量流束密度, 6
- エネルギー運動量テンソル, 78
- エネルギーカスケード, 35
- エネルギー保存の式, 9
 - 磁場の —, 57
 - 特殊相対論における —, 80
- エネルギー流束密度, 9
- エピサイクル振動数, 61, 67
- エントロピー保存の式, 7, 54, 80
- オイラー形式, 5
- オイラー方程式, 5
 - 円盤天体の —, 64
 - 特殊相対論における —, 80
- オイラー方程式の保存形, 6
- オームの法則, 55
 - 一般化された —, 62
- 音速, 14
- 音波, 14
 - 相対論的流体力学における —, 84
- 希薄波, 16
- 共変形式, 76
- 共変成分, 76
- 共変微分, 81
- クリストッフェル記号, 81
- 計量テンソル, 76
- ケルビン-ヘルムホルツの不安定性, 34
- 恒星大気, 45
- 恒星風, 45
 - の加速メカニズム, 46
- 降着円盤, 68
 - の角運動量保存の式, 69
- 降着流, 47
- 差動回転, 66
- ジーンズの不安定性, 39
- 磁気圧, 56
- 磁気拡散係数, 57
- 磁気張力, 56
- 磁気流体, 55
- 磁気流体力学, 55
- 自己重力不安定性
 - 一様ガスの —, 39
 - 円盤天体の —, 66
- 自己相似解
 - 降着円盤の, 70
 - セドフ解, 49
- 質量降着率
 - 降着円盤の —, 69
 - 降着流の —, 47
- 質量保存の式, 3
- 質量流束密度, 4
- 磁場による Maxwell の応力テンソル, 56
- 磁場の拡散, 58
- 磁場の凍結, 58
- 磁場の誘導方程式, 56, 57
 - 一般化された —, 62
- 弱電離プラズマ, 60
- 自由落下, 38
- 衝撃波, 20
 - 相対論的流体力学における —, 84
- 衝撃波断熱曲線, 21
 - Taub の —, 85
- 衝突時間, 60
- 世界間隔, 75
- 世界線, 75
- 世界点, 75

静水圧平衡, 28
 静水圧方程式, 28
 接線不連続, 20
 セドフ解, 48
 —のエネルギー積分, 51
 —の断熱積分, 53
 線形安定性解, 31

 相対性原理, 75
 相対論的ジェット, 75, 86
 Sod の問題, 25

 太陽コロナ, 45
 太陽風, 45
 対流, 29
 WKB 近似, 66
 ダランベールのパラドックス, 12
 単純波, 15
 断熱温度勾配, 30
 断熱の式, 7
 特殊相対論における —, 80

 チャンドラセカル限界質量, 44
 中性子星, 44

 定圧比熱, 13
 定積比熱, 13
 電気的中性, 55
 電気伝導度, 61

 Toomre の安定条件, 67
 Toomre の Q 値, 67
 等エントロピー運動, 7
 Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式, 44, 82
 特性曲線, 16

 内部重力波, 30
 ナビエ-ストークス方程式, 12

 粘性加熱, 71

 パーカー解, 46
 白色矮星, 44
 爆風波, 48
 —の圧力駆動の雪かき段階, 54
 —の運動量保存の雪かき段階, 54
 —の自由膨張段階, 49
 —のセドフ解, 48
 超相対論的な—, 86
 バロクリニック流体, 8
 バロトロピック流体, 8
 反変成分, 76

 非圧縮性流体, 10
 比熱, 13
 表面重力波, 34
 ビリアル定理, 40

 Faraday の誘導法則, 55
 負の熱容量, 41
 プラズマ, 55
 ブラント-バイサラ振動数, 30
 Blandford-McKee 解, 86
 浮力, 30
 分散関係, 33

 平均自由行程, 3
 ベルヌーイの式, 8
 一般相対論の静的重力場内の —, 83
 特殊相対論における —, 80

 ポアソン断熱曲線, 22
 ポアソン方程式, 28
 円盤天体の —, 64
 膨張波, 16
 ホール効果, 62
 ホールパラメーター, 61
 ポテンシャル流, 10
 ポリトロープガス球, 41
 ポリトロープ指数, 41
 ポリトロープの関係式, 7
 Bondi 解, 48
 Bondi 半径, 48

 4 元速度ベクトル, 77
 よどみ点, 11

 ラグランジュ微分, 4
 ラバール管 (またはラバールノズル), 27
 ランキン-ユゴニオの断熱曲線, 21
 乱流, 35

乱流拡散係数, 37
乱流カスケード, 35
—のエネルギー分布, 36
—の速度分布, 35
乱流粘性, 68

リーマン不変量, 19
リーマン問題, 23
理想流体, 7
流管, 10
両極性拡散, 62

レーリー-テラーの不安定性, 33
Rayleigh の安定条件, 67
レーン-エムデン関数, 42
レーン-エムデン方程式, 42
連続の式, 4
— 円盤天体の —, 64
— 特殊相対論における —, 78

ローレンツ因子, 77
ローレンツ収縮, 75
ローレンツ変換, 75
— 4元ベクトルの —, 77
ローレンツ力, 56