

電磁気学演習 C 第 1, 2 回

ベクトル解析

[1] 「Kroneker のデルタ (δ_{ij}) と Eddington のイプシロン (ε_{ijk})」
以下を示せ.

$$(1) \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \delta_{ij}\delta_{ij} = 3 \quad (2) (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$$

$$(3) \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

[2] Eddington のイプシロンを用いて, 次の公式を示せ.

$$(1) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$(2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(3) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})\}\mathbf{C} - \{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\}\mathbf{D}$$

[3] 「スカラー場, ベクトル場の微分演算」

$r = xe_x + ye_y + ze_z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$ について, 次の量を計算せよ.

$$(1) \nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3), \quad (2) \nabla \times \mathbf{r}, \quad (3) \nabla(\log r), \quad (4) \nabla f(r), \quad (5) \nabla^2(1/r).$$

[4] 以下の公式を示せ.

$$(1) \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$(2) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(3) \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$(4) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(5) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$(6) \nabla \times (\nabla \phi) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

[5] 「ガウスの定理」

一辺の長さが 1 の立方体 V を 4 つの頂点の位置が, $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ となるようにおく. その表面を S とする. 面積分

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS}, \quad \mathbf{A} = xy^2\mathbf{e}_x - yz^2\mathbf{e}_y + 6z^2\mathbf{e}_z$$

について, ガウスの定理を確かめよ. (実際に面積積分と体積積分を計算する.)

[6] 次の公式を示せ. 但し, V はある 3 次元領域で, S はそれを囲む閉曲面とする.

$$(1) \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{ndS} = 0, \quad (2) \int_V \nabla \phi dV = \int_S \phi \mathbf{ndS}$$

[7] 「スカラー場の方向微分係数」

点 $P(x, y, z)$ で単位ベクトル $\boldsymbol{\ell} = l_1\mathbf{e}_x + l_2\mathbf{e}_y + l_3\mathbf{e}_z$ が与えられたとき,

$$\frac{d\phi}{d\ell} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + l_1\Delta t, y + l_2\Delta t, z + l_3\Delta t) - \phi(x, y, z)}{\Delta t}$$

を, $\phi(x, y, z)$ の点 P における $\boldsymbol{\ell}$ 方向への方向微分係数という.

- (1) $\frac{d\phi}{d\ell} = \boldsymbol{\ell} \cdot \nabla\phi$ を示せ.
- (2) 関数 $\phi(x, y, z) = x^2y^2z + xz^3 + yz$ の, 点 $P(2, -1, 1)$ における, ベクトル $\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z$ の方向への方向微分係数を求めよ.
- (3) $\phi(x, y, z)$ が一定の曲面 (等ポテンシャル面) の法線ベクトルを \mathbf{n} としたとき, $\nabla\phi = \frac{d\phi}{dn}\mathbf{n}$ を示せ. (これより, $\nabla\phi$ は等ポテンシャル面に直交する.)

[8] 「円筒座標と球座標における基底ベクトル」

- (1) 円筒座標系 (r, ϕ, z) の基底ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ の xyz 系における成分を求めよ.
- (2) 球座標系 (r, θ, φ) に対しても, 同様に基底ベクトルの成分を求めよ.
- (3) ベクトル \mathbf{A} の円筒座標と球座標での成分 (A_r, A_ϕ, A_z) , $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ をそれぞれ直角座標での成分 A_x, A_y, A_z を用いて表せ.

[9] 「直交曲線座標における勾配, 発散, 回転」

- (1) 勾配の公式 (最小知識 (a)) を導出せよ.
(ヒント: $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ と $d\phi = \sum_i (\partial\phi/\partial u_i) du_i$ を比較する.)
- (2) 勾配の公式を用いて, 基底ベクトルと h_i のもう 1 つの表式 $\mathbf{e}_i = \nabla u_i / |\nabla u_i|$, $h_i = 1/|\nabla u_i|$ を導出せよ. 又, $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$ も示せ.
(右手系を仮定し, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ としてよい.)
- (3) 発散の公式 (最小知識 (b)) を導出せよ.
(ヒント: まず, $\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3)$ を $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$ を用いて示す.)
- (4) 回転の公式 (最小知識 (c)) を導出せよ.
(ヒント: まず, $\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1)$ を $\mathbf{e}_1 = h_1 \nabla u_1$ を用いて示す.)
- (5) 円筒座標における $\text{grad}\phi$, $\text{div}\mathbf{A}$, $\text{rot}\mathbf{A}$ の表式を求めよ.
- (6) 球座標での $\text{grad}\phi$, $\text{div}\mathbf{A}$, $\text{rot}\mathbf{A}$ の表式を同様に導出せよ.

【第1, 2回の最小知識】 ベクトル解析

1. 基底ベクトルとベクトルの成分

- 基底ベクトル： $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
- ベクトルの成分： $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \quad A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$

2. 和の規約

- ベクトルの内積：
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i$$
- 行列の積：
2つの行列 A_{ij}, B_{ij} に対し、行列の積は次式で表される。
 $(AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}$

3. クロネッカーのデルタ, δ_{ij} (単位行列)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

例： $A_{ij} \delta_{jk} = A_{ik}$

4. エディントンのイプシロン, ϵ_{ijk}

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1 \\ \text{それ以外では, } \epsilon_{ijk} = 0 \end{cases}$$

性質： $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$

外積： $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

公式： $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{lk}$

5. 微分演算子 ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- gradient (勾配)： $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$
- divergence (発散)： $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$
- rotation (回転)： $\text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$

6. 微分公式

$$\nabla f(\varphi) = \frac{df}{d\varphi} \nabla \varphi, \quad \nabla(\varphi\psi) = \psi(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\psi, \quad \nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A}$$

(問題 [4] も参照)

7. 積分定理

- ガウスの定理：
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \int_V \nabla \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS,$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS$$

- ストークスの定理：
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

8. 直交曲線座標

$$(u_1, u_2, u_3) \quad [u_i = u_i(x, y, z)]$$

(r, φ, z) : 円筒座標

(r, θ, φ) : 球座標

- 基底ベクトル：
$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \nabla u_i / |\nabla u_i|$$

- 線素と体積要素

(i) u_i 軸に沿った線素：
$$ds_i = h_i du_i \quad (h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = 1/|\nabla u_i|)$$

[例：円筒座標 $(h_r, h_\varphi, h_z) = (1, r, 1)$]

(ii) 一般の線素：
$$ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2}$$

(iii) 体積要素：
$$dV = ds_1 ds_2 ds_3$$

- 勾配, 発散, 回転の公式

$$\text{grad}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3, \quad (a)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right], \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{A} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial h_3 A_3}{\partial u_2} - \frac{\partial h_2 A_2}{\partial u_3} \right] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial h_1 A_1}{\partial u_3} - \frac{\partial h_3 A_3}{\partial u_1} \right] \mathbf{e}_2 \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial h_2 A_2}{\partial u_1} - \frac{\partial h_1 A_1}{\partial u_2} \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (c)$$

電磁気学演習 C 第 3 回

[12] 「クーロン力と重力」

2つ鉄球（質量 m [kg]）が、それぞれ q [C] だけ帯電し、距離 r [m] 離れて置かれている。（ r は鉄球半径に比べて十分大きい。）今、2つの鉄球間に働く万有引力とクーロン力が釣り合っている。このとき、 q/m [C/kg] を求めよ。さらに、これらの鉄球は鉄の中の電子が失われることで正に帯電したとする。Fe 原子 1 個当たり、どの位の割合で電子が失われているのか？

$$\begin{aligned} \text{真空の誘電率： } \epsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12} && [\text{C}^2/(\text{Nm}^2)], \\ \text{万有引力定数： } G &= 6.67 \times 10^{-11} && [\text{Nm}^2/\text{kg}^2], \\ \text{電子電荷： } e &= 1.60 \times 10^{-19} && [\text{C}], \\ \text{Fe 原子質量： } m_{\text{Fe}} &= 9.26 \times 10^{-26} && [\text{kg}] \end{aligned}$$

[13] 「電気双極子」

- (1) 電気双極子とは同量異符号の2つの点電荷が接近しておかれたものである。電気双極子モーメント \mathbf{p} の電気双極子が作る静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

と表されることを示せ。また、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の表式も導出せよ。

- (2) 外部電場 \mathbf{E} におかれたモーメント \mathbf{p} の電気双極子の位置エネルギーは、 $V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ で与えられることを示せ。
- (3) 位置 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ にある2つの電気双極子 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の間の位置エネルギーを求めよ。

[14] 「静電場の例」

以下の各場合における電場 \mathbf{E} と静電ポテンシャル ϕ を（ガウスの法則又はクーロンの法則を用いて）求めよ。

- (1) 無限に広い平面上に一様面密度 σ [C/m²] で電荷が分布している場合
- (2) 無限に長い直線上に一様線密度 λ [C/m] で電荷が分布している場合
- (3) 半径 a の球内に一様に電荷が分布している場合（全電荷 q [C]）
- (4) z 軸を中心軸として半径 a の無限に長い円柱内に一様電荷密度 (λ' [C/m³]) で分布している場合（ z 軸上で $\phi = 0$ とする）
- (5) xy 面内で原点を中心とする半径 a の円周上に一様線密度 λ [C/m] で電荷が分布している場合（ z 軸上のみで \mathbf{E}, ϕ を求めればよい）

- [15] 「クーロンの法則とガウスの法則」
点電荷 q に対するガウスの法則

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (a)$$

をクーロン法則から導く。

- (1) 点電荷を中心とする球面を面積 S にとった場合に, (a) 式が成り立つことをクーロンの法則を用いて示せ.
 - (2) 点電荷を囲む任意の閉曲面 S に対し, (a) 式が成り立つことを示せ.
 - (3) 閉曲面 S の外部に点電荷がある場合には, $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ となることを示せ.
 - (4) 以上より, $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$ を示せ.
- [16] 「コンデンサーがつくる電場」
- (1) 半径 r_1, r_2 ($r_1 < r_2$) の同心球殻からなるコンデンサーがある. 外球が接地され, 内球に電荷 q を与えた場合の静電ポテンシャル ϕ を求めよ. 又, これよりそのコンデンサーの静電容量 C を求めよ. 又, $r_2 - r_1 \ll r_1$ の極限で C はどうなるか.
 - (2) (1) のコンデンサーで内球が接地され, 外球に電荷 q を与えた場合に対し, ϕ と C を求めよ.
 - (3) 外側が接地されている同軸円筒コンデンサー (半径 r_1, r_2 , 長さ l ($\gg r_2$)) の静電容量 C を求めよ. 又, $r_2 - r_1 \ll r_1$ の極限ではどうか.
- [17] 「電荷と導体がつくる電場」

- (1) 平面を境に半無限空間を占める接地された導体がある. その表面から距離 d の点に点電荷 $+q$ をおいたときの静電ポテンシャルと電場を求めよ.
- (2) (1) の場合において, 導体表面上に誘導される電荷分布とその総量を求めよ.
- (3) 今度は接地された半径 a の導体球を考える. この球の中心から距離 $a + d$ の点に点電荷 $+q$ をおいたとき, つくられる静電ポテンシャルと導体表面上に誘導される電荷分布を求めよ. 又, その結果は $a \rightarrow \infty$ の極限でどうなるか.

- [18] 「Lorenz 力と荷電粒子の運動」
電磁場中の荷電粒子 (電荷 q) は次の Lorenz 力 \mathbf{F} を受ける:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\mathbf{v}: \text{粒子速度})$$

- (1) 一様な定磁場があり $\mathbf{E} = 0$ とする. 磁場 \mathbf{B} の方向を z 軸に取り, 荷電粒子に対する運動方程式 (x, y, z 成分) を書き下せ. 又, その一般解を求めよ.
- (2) (1) と同じ磁場に, 更に x 方向を向いた一様定電場 \mathbf{E} があるとする. $t = 0$ において荷電粒子が静止していた場合, その後の粒子の運動を解け. 又, 粒子は x 方向にどれだけ動けるか.

電磁気学演習【第3回の最小知識】

1. 静電場

- (1) ● 電場 \mathbf{E} : $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
● 静電ポテンシャル ϕ : $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$

- (2) 点電荷 q (位置 \mathbf{x}_0) がつくる電場 :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

(クーロンの法則)

- (3) 電気双極子がつくる電場 :

- 2つの電荷 $\pm q$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \pm \mathbf{s}/2$) を考えればよい.
⇒ 双極子モーメント $\mathbf{p} = q\mathbf{s}$
- ポテンシャル ϕ : 2つの電荷によるポテンシャルの重ね合わせ

- (4) 一般の電荷密度の分布 $\rho(\mathbf{x})$ がつくる電場 :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' dy' dz' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

(注 : 導体などの境界がない場合)

2. ガウスの法則 :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

$$\iff \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\iff \Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3. デイラックの δ 関数 :

- 1次元 : $\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) & (a < x_0 < b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}$

- 3次元 : $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) dV = \begin{cases} f(\mathbf{x}_0) & (\mathbf{x}_0 \text{ は } V \text{ の内部}) \\ 0 & (\mathbf{x}_0 \text{ は } V \text{ の外部}) \end{cases}$$

電磁気学演習C第4回

[19] 「誘電体がつくる電場」

分子の分極により誘電体内につくられる「電気双極子モーメント」の分布密度を $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$ で表す。このとき、体積 V の静電体が位置 \mathbf{x} につくる分極による静電ポテンシャル $\phi_d(\mathbf{x})$ は次式で与えられる。(注： grad' は \mathbf{x}' に作用する。)

$$\phi_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (a)$$

- (1) (a) 式の ϕ_d は以下の (b) 式のように変形されることを示せ。又 (b) 式の意味することを説明せよ。

$$\phi_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_d(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\omega_d(S')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' \quad (b)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_d = -\nabla \cdot \mathbf{P} : \text{分極電荷密度} \\ \omega_d = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} : \text{分極表面電荷密度} \\ \mathbf{n} : \text{誘電体表面の外向きの法線のベクトル} \end{array} \right.$$

- (2) 電束密度 \mathbf{D} は、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ で定義される。誘電体中の Gauss の法則は

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_e$$

で表されることを示せ。但し、 ρ_e は誘電体中に外から与えられた真電荷の密度である。(電場 \mathbf{E} は、上の ϕ_d と真電荷の和で決まることに注目。)

- (3) 通常の誘電体では分極ベクトルは、 $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ のように \mathbf{E} に比例する。この比例定数 χ が正であることを、簡単な考察より示せ。又、 $\chi > 0$ である分極により、誘電体内で電場 \mathbf{E} は弱められることも示せ。($\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ を用いると、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ となる。 ϵ は誘電率。)
- (4) 2種の異なる誘電率をもつ誘電体 (ϵ_1, ϵ_2) がある境界面で接している。境界面での条件の1つである次式を導出せよ。

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \omega_e$$

但し、 ω_e は境界面での真電荷表面密度、 \mathbf{n} は境界面に垂直で誘電体2から1を向いた単位ベクトルである。

- (5) 次の境界条件も導出せよ。但し、 \mathbf{t} は境界面内に沿った単位ベクトルである。

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0$$

[20] 「ポアソン方程式とラプラス方程式」

一般に静電ポテンシャル ϕ は次の Poisson 方程式を解くことにより求められる。

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon \quad (a)$$

- (1) 電荷分布が球対称で, ρ, ϕ がともに r のみの関数であるとき, (a) 式を簡単化せよ. 又, 問題 [14](3) の解がそれを満たすことを確かめよ.
- (2) Poisson 方程式の右辺が 0 の場合を特に Laplace 方程式という ($\Delta\phi = 0$). Laplace 方程式の軸対称な解を球座標系で解いてみる. 今, 解として変数分離形を仮定し,

$$\phi(r, \theta) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) \quad (b)$$

とおく. $u(r)$ と $P(\theta)$ に対する以下の方程式を導出せよ.

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{C}{r^2}u = 0 \quad (c)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + CP = 0 \quad (d)$$

- (3) $C = \ell(\ell + 1)$ の場合, $\cos\theta = x$ と変換すると, (d) 式はルジャンドルの微分方程式になっていることを示せ. 又, $\ell = 0 \sim 2$ に対し, P_ℓ は $P_0(\cos\theta) = 1$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, $P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$ であるが, これらが (d) 式を満たしていることを確認せよ.
- (4) $C = \ell(\ell + 1)$ の場合に対し, (c) 式を解き, $u_\ell(r)$ の一般解を求めよ. 結局これより, Laplace 方程式の解は ℓ についての和で与えられる.

$$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\theta)$$

[21] 「一様な静電場の中におかれた導体球」

半径 a の導体球を, z 方向を向く一様な外部電場 $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$ の中におく. これによる静電場の変化を求める. 導体球外部には, 電荷がないので [20] の Laplace 方程式の解が使える. (系の対称性より, 軸対称の解でよい.)

- (1) まずは [20] の解の ℓ に関する和の初めの 2 個 ($\ell = 0, 1$) のみを使って, 静電ポテンシャル ϕ の形を

$$\phi(r, \theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos\theta \quad (a)$$

とおく. 又, $A_0 = 0$ とする. 定数 A_1, B_0, B_1 を決定せよ. 但し, 導体表面で $\phi = 0$ とする.

- (2) (1) の結果より, 電場 \mathbf{E} を求め, さらに導体表面の電荷分布を求めよ.
- (3) 導体表面で $\phi = C$ ($\neq 0$) とすると静電ポテンシャル ϕ と導体表面の電荷分布はどうなるか.

[22] 「一様な電場 E_0 の中におかれた誘電体球」

問題 [21] での導体球の代わりに、半径 a の誘電体球をおく。(誘電率 ε) 誘電体の内部と外部両方に対し、静電ポテンシャル ϕ は [21](a) の式の形に与えられる。但し、各定数は内外部で異なる。今、誘電体球には真電荷はないとする。

- (1) 誘電体外の A_1 を求めよ ($A_0 = 0$ とする)。又、誘電体内の B_0, B_1 も決定せよ。
- (2) $r = a$ で、外部ポテンシャル ϕ_{ex} と内部ポテンシャル ϕ_{in} との間に成り立つ境界条件を書け。又、それらより ϕ_{in}, ϕ_{ex} を決定せよ。
- (3) 誘電体内外での電場 E を求めよ。又、 $\varepsilon > \varepsilon_0$ のとき、内側での電場の強さはもとの外部電場 E_0 より強いのか、それとも弱いのか。

[23] 静電エネルギー

- (1) n 個の点電荷 q_i ($i = 1 \sim n$) が、それぞれ真空中の位置 \mathbf{x}_i におかれている。これらの電荷の系の静電エネルギー U_e を求めよ。
- (2) 一般に真空中のある体積 V に電荷が電荷密度 $\rho_e(\mathbf{x})$ 分布しているとき、その静電エネルギーは

$$U_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho_e(\mathbf{x})\rho_e(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (a)$$

で与えられる。(a) 式は静電ポテンシャル ϕ を用いて

$$U_e = \frac{1}{2} \int \rho_e \phi d^3x \quad (b)$$

と表されることを示せ。さらに

$$U_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3x \quad (c)$$

とも等しいことを示せ。但し、(c) 式の体積積分は、領域 V に比べ十分広い範囲に対して行う。(ヒント： $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \phi \rho_e - \text{div}(\phi \mathbf{D})$)

- (3) 半径 a の球内に電荷 q が一様密度で分布している。これに対し、(b) 式より静電エネルギー U_e を求めよ。又、(c) 式からも U_e を求め、互いに一致することを確かめよ ([14](2) の解を用いてよい)。
- (4) 面積 S の 2 枚の電極を距離 x をおいてつくった平行平板コンデンサーがある。これらの電極にそれぞれ電荷 $\pm Q$ を与えたときの静電エネルギーを以下の 2 通りの方法で求めよ。
 - コンデンサーの静電容量を求め、それを用いる。
 - 電場 E を求め、(c) 式を用いる。

電磁気学演習【第4回の最小知識】

4. 誘電体（絶縁体）

- 電場中におかれた誘電体内では，構成分子が分極し，各分子は電気双極子となる．
- 誘電体中のガウスの法則

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_e$$

(ε は誘電率．物質によって異なる．通常， $\varepsilon > \varepsilon_0$)

5. ルジャンドル多項式： $P_\ell(x)$

- ルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\ell}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$$

(ℓ は0，又は自然数とする．それ以外の場合， P_ℓ は発散する.)

- $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$
- 球座標系での Laplace 方程式の解 ($\Delta\phi = 0$, 軸対称)

$$\phi(r, \theta) = \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos \theta)$$

6. 静電エネルギー

- 遠隔作用の立場：

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_e \phi dV \quad (1)$$

- 近接作用の立場（場のエネルギー）：

$$U_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (2)$$

静電場では，(1)と(2)は同じものである．(時間変化する電磁場では両者に違いが生まれる.)

電磁気学演習C第5回

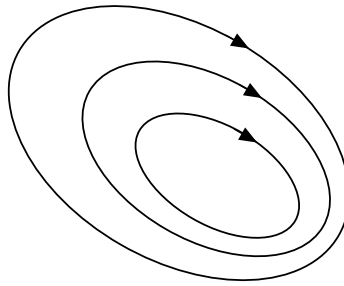
[24] 「Faraday の電磁誘導法則」

- (1) 磁場が変化することにより，閉回路には起電力が発生する．起電力 ϕ [volt] と閉回路を貫く磁束 N [Weber] の間の関係式を書け．又， ϕ を電場 \mathbf{E} で N を磁束密度 \mathbf{B} で表せ．
- (2) Maxwell 方程式の 1 つである

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

を (1) の関係式より導出せよ．

- (3) 静電磁場において下図のような閉じた電気力線は存在し得ないことを示せ．また，磁力線はどうか．



[25]

- (1) 「定常電流に対する Ampère の法則」
定常電流 I のまわりにつくられる磁場 \mathbf{B} は次の Ampère の法則を満たす．

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (a)$$

ここで，上式左辺の積分は電流のまわりを一周する閉曲線に沿った線積分である．今，太さのある電線を考え，その電線内の電流密度を $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ とする．この様な場合に対し (a) 式を一般化し，それを用いて

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \quad (b)$$

を導出せよ．

(2) 「電荷保存則」

電流は、電荷を持つ粒子が運動することにより、生じる。面 ΔS を横切る、単位時間あたりの電気量 ΔQ は

$$\Delta Q = \int_{\Delta S} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

で与えられる。電荷の生成消滅がないことにより、電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (c)$$

を導出せよ（但し、 ρ は電荷密度である）。

(3) 「Ampère-Maxwell の法則」

(b) 式を時間変化する系にも適用した場合、電荷保存則の (c) 式と矛盾することを示せ。Maxwell はこの矛盾を解決するため、(b) 式を

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (d)$$

と拡張した。(d) 式は、電荷保存則を満たすことを示せ。(d) 式は Maxwell 方程式の 1 つである。

[26] 「Ampère の法則と Biot-Savart の法則」

(定常) 直線電流 (I [A]) が作る磁場 \mathbf{B} を [25](a) の Ampère の法則より求めよ。又、Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

を用いて、同様に \mathbf{B} を求めよ。

[27] 静磁場を決定する方程式は、Maxwell 方程式より以下の 2 式で与えられる。

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (a)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (b)$$

(1) (a), (b) 式を解くには、次式で定義されるベクトルポテンシャル \mathbf{A} を導入するとよい。

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (c)$$

(c) 式のように、 \mathbf{B} をおいたとき、(b) 式は自動的に満たされることを示せ。又、(a) 式は次式のように変形されることを示せ。

$$\Delta \mathbf{A} - \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (d)$$

(2) ベクトルポテンシャル \mathbf{A} には,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \text{grad } u(\mathbf{x}) \quad (e)$$

というスカラー関数 $u(\mathbf{x})$ の不定性があることを示せ. 又, この不定性を利用し,

$$\text{div} \mathbf{A}' = 0 \quad (f)$$

とすることができる. そのような $u(\mathbf{x})$ を求めよ.

(3) (e) 式の変換はゲージ交換と呼ばれる. 又, (f) 式を満たす \mathbf{A}' はローレンツゲージのベクトルポテンシャルと呼ばれる. ローレンツゲージの \mathbf{A}' は, 真空である体積 V 内に電流が分布しているとき, 次式で与えられる.

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (g)$$

(g) 式が, (d), (f) 式を満たすことを確かめよ.

(4) (c), (g) 式より, 磁場 \mathbf{B} に対する公式 (ビオ-サバールの法則の一般形)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

を導出せよ.

[28]

- (1) 無限に長い直線定常電流 I がそのまわりにつくるベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求めよ ([27] の (g) 式を用いてよい). 又, それより磁場 \mathbf{B} を求め, [26] の結果と等しくなることを確かめよ.
- (2) 厚さ d の無限に広い導体板に, 一様電流密度 \mathbf{i} で電流が板に沿って一定方向に流れている. この電流が板の内外につくるベクトルポテンシャル \mathbf{A} と磁場 \mathbf{B} を求めよ.

[29] 「無限に長いソレノイドがつくる磁場」

導線のある軸のまわりにらせん状に巻いてつくられる細長いコイルをソレノイドという. 今, 無限に長く十分密に巻かれたソレノイドを考え, これに電流 I が流れた時につくられる磁場 \mathbf{B} を調べる.

- (1) ソレノイドの軸上につくられる磁場 \mathbf{B} を求めよ. (巻きが十分密なので電流の軸方向成分は無視してよい. ソレノイドの単位長さあたり n 回巻いてあるとする.)
- (2) $\text{div} \mathbf{B} = 0$ より, 磁場 \mathbf{B} のソレノイドの軸に垂直な成分は 0 であることを示せ.
- (3) ソレノイド内部は一様磁場で, 外部では磁場がないことを示せ.

電磁気学演習【第5回の最小知識】

7. マクスウェル方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad : (\text{電場の}) \text{ ガウスの法則}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad : (\text{磁場の}) \text{ ガウスの法則}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad : \text{ファラデーの電磁誘導の法則}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{i} \quad : \text{アンペールの法則の一般化}$$

(ε_0 , μ_0 : 真空の誘電率, 透磁率, \mathbf{i} : 電流密度)

8. 静磁場 (電流による磁場)

- 方程式 :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

- ベクトルポテンシャル \mathbf{A}

定義 : $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

方程式 : $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i}$

- 電流分布 \mathbf{i} による磁場 :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x',$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

電磁気学演習C第6回

- [30] 「閉電流が遠方につくる磁場と磁気双極子モーメント」
 定常電流 I の流れる閉回路 C が位置 \mathbf{r} につくるベクトルポテンシャル \mathbf{A} は [27] の (g) 式より

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (a)$$

で与えられる。今、位置ベクトル \mathbf{r} , \mathbf{r}' の原点は閉回路の近くにとるものとする。

- (1) 閉回路から十分離れた位置 \mathbf{r} における \mathbf{A} は近似的に

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (b)$$

で与えられることを示せ。

- (2) 閉回路が一平面上にある場合、次式を示せ。但し、 S は閉回路が囲む面積で、 \mathbf{n} はその平面の法線ベクトル（電流の右ねじの方向）である。

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = S\mathbf{n} \quad (c)$$

- (3) 閉電流の磁気双極子モーメント \mathbf{m} は次式で定義される。

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mu_0 I \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \quad (d)$$

(b) 式を \mathbf{m} で表せ。又、この閉電流から十分離れた場所につくられる磁場 \mathbf{B} は次式で与えられることを示せ。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right] \quad (e)$$

- [31] 「回転帯電球による磁場」
 半径 a の球の表面に電荷 Q が一様に埋め込まれているとする。この球をその中心 O を通る軸の周りに角速度 ω で回転させる。（このとき電荷も一緒に回転するとする。）

- (1) 球内部の回転軸上につくられる磁場を求めよ。
 (2) この回転球の磁気双極子モーメントを求め、遠方での磁場を求めよ。

- [32] 「一様に磁化した球形磁石による磁場」
 磁石内での磁気双極子モーメントの分布密度を $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ で表す。このとき、磁石のつくるベクトルポテンシャル \mathbf{A} は [30](b), (d) 式より次式で与えられる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (a)$$

今、磁石内部で磁化ベクトル $\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}$ は一定であるとする。

(1) この場合, (a) 式は次式の様に変形できることを示せ.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \text{grad} \left(\int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (b)$$

(2) さらに, 磁石が半径 a の球形である場合に対し, \mathbf{A} を求めよ. それにより, この磁石が外部につくる磁場は磁気双極子モーメント $\frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{M}$ による磁場に等しいことを示せ ([14](3) 参考).

[33] 「磁気双極子間に働く力」

- (1) 互いに離れた 2 つの磁気双極子間の位置エネルギーと互いに働く力を求めよ.
- (2) [32](2) の一様磁化磁石 2 個 (半径 a) が z 軸上にそれぞれの中心が d だけ離れて置いてある. それぞれの磁化の方向は z 軸の正方向である. $d \gg a$ として互いに働く力を求めよ.

[34] [31] と同じ帯電球を考え, それが初め静止しているものとする. このまわりに一様な磁場 $\mathbf{B}(t)$ をかけたとする. 但し, 球による磁場 \mathbf{B} に対する影響は小さいとする. このとき, 発生する誘導電場を求め, 球に働くトルクを求めよ.

[35] 半径 a の円形の導線の中心軸上を, 磁気モーメント m の小磁石が, モーメントの方向を軸に平行にして運動している. 導線回路の中心から磁石までの距離 z とし, 磁石の速度を v としたとき, 回路に誘導される起電力を求めよ.

[36] 間隔 d に置いた無限に長い 2 本の平行導線に I_1, I_2 を流すときに, 単位長さあたりに作用する力をもとめよ. 又, $I_1 = I_2 = 1[\text{A}]$, $d = 1[\text{m}]$ としたとき単位長さに作用する力 $[\text{N}]$ はいくらか?

[37] 「交流電流の表皮効果」

導体中の交流電流を考える場合, Maxwell 方程式における変位電流の項 ($\partial \mathbf{D} / \partial t$) は無視できる. 又, 電流密度に対してはオームの法則 ($\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$) が成り立つ. このような電流は準定常電流と呼ばれる.

(1) 上の近似の下で, Maxwell 方程式から次式を導出せよ.

$$\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad (a)$$

(2) 平面の表面を持つ半無限の導体を考え, この面に沿った方向の交流電流を調べる. 表面を $z = 0$ とし, 導体は $z > 0$ にあるものとする. 電流密度としては次式の形のものを考える.

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x i_0 f(z) e^{i\omega t} \quad (b)$$

境界条件 $f(0) = 1$ のもとで $f(z)$ を求めよ. (その結果, 交流電流は主に導体表面近くで流れることがわかる. これが表皮効果である.)

電磁気学演習【第6回の最小知識】

9. 磁気モーメントと磁場

- 閉電流の磁気モーメント m

$$m = \frac{1}{2} \mu_0 I \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'$$

- 磁気モーメントのつくる磁場

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]$$

10. 磁性体

- 構成分子が方向のそろった「分子電流」を持っている
 \implies 磁気双極子モーメントの密度 M
- 磁化ベクトル: $\mathbf{J} \equiv \mu_0 M$

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} + \mathbf{J}_0$$

(\mathbf{H} : 磁場, χ : 磁化率, \mathbf{J}_0 : 永久磁化)

- 磁場 \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \\ &= \mu \mathbf{H} + \mathbf{J}_0 \\ &\quad (\mu: \text{透磁率}) \end{aligned}$$

11. 電磁気の単位 (MKSA 系, SI 系とも呼ばれる)

電流 I :	[A]	磁場 \mathbf{H} :	[A/m]
電荷 q :	[C] = [Am]	磁束密度 \mathbf{B} :	[T (テスラ)]
電位 ϕ :	[V] = [J/C]		= [Nm ⁻¹ A ⁻¹]
電場 \mathbf{E} :	[V/m] = [N/C]		= [10 ⁴ G (ガウス)]
電束密度 \mathbf{D} :	[C/m ²]	磁束 N :	[Wb (ウエーバー)]
誘電率 ϵ :	[F/m] = [NC ²]		= [NmA ⁻¹]
電気容量 C :	[F (ファラド)]	磁荷 q_m :	[Wb]
	= [JC ²]	透磁率 μ :	[H/m] = [NA ⁻²]
		誘導係数 L :	[H (ヘンリー)] = [JA ⁻²]

電磁気学演習C第7回

[38] 「電磁ポテンシャルとゲージ交換」

電磁波を記述する場合，ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を用いると便利である．これらにより， \mathbf{E} と \mathbf{B} は次式で与えられる．

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \\ \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \end{cases} \quad (a)$$

- (1) Maxwell 方程式のそれぞれ (4つ) に (a) 式を代入せよ．その結果， \mathbf{A} と ϕ に対する方程式を求めよ．($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ とする.)
- (2) ゲージ変換 $(\mathbf{A}, \phi) \rightarrow (\mathbf{A}', \phi')$ は任意のスカラー関数 $u(\mathbf{x}, t)$ を用いて次式のように表される．

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}u \\ \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}u \end{cases} \quad (b)$$

このゲージ変換に対し， \mathbf{E} , \mathbf{B} は不変であることを示せ．又，(1) で求めた方程式と同じものを \mathbf{A}' と ϕ' が満たすことを示せ．

- (3) (b) 式の u の不定性より

$$\text{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad (\text{ローレンツゲージ}) \quad (c)$$

とできる．このようにするために u が満たすべき条件を求めよ．又，(c) 式が成り立つ場合に対し， \mathbf{A}' と ϕ' が満たす方程式を簡単化せよ．

- (4) 真空中で電荷や電流のない場合 ($\rho_e = 0$, $\mathbf{i}_e = 0$) の電磁波は，自由電磁波と呼ばれる．この場合，(b) 式の u を適当に選ぶことにより，(c) 式を満たしつつ， $\phi = 0$ とすることが全空間時間でできることを示せ．

[39] 「自由電磁波」

前問より，自由電磁波の基礎方程式系は次の様になる．

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, & \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \\ (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A} = 0, & \text{div}\mathbf{A} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

- (1) (b) 式の解の一つは次式で与えられる．

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left[\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (c)$$

(b) 式より，複素定ベクトル \mathbf{A}_0 ，実定ベクトル \mathbf{k} と定数 ω の間の関係式 (2つ) を求めよ．又，実定ベクトル \mathbf{k} の大きさ，方向の意味を説明せよ．

(2) (a), (c) 式より \mathbf{E} , \mathbf{B} を求めよ. \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} は互いに垂直であることを示せ.

(3) より一般に,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (\mathbf{A}_0 : \text{定実ベクトル}) \quad (d)$$

も (b) 式を満足することを示せ. 但し, $f(x)$ は微分可能な任意の実関数である. さらに, この場合に対して \mathbf{E} と \mathbf{B} も求めよ.

(4) 電磁波の単位体積当たりのエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (e)$$

で与えられ, 一方, 単位時間あたり単位面積を通して電磁波により運ばれるエネルギー ΔU は次式で与えられる.

$$\begin{cases} \Delta U = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad : \text{ポインティングベクトル} \end{cases} \quad (f)$$

ここで, \mathbf{n} は横切る面の法線単位ベクトルである. (c) 式の \mathbf{A} で与えられる電磁波に対し, U と ΔU の時間平均値, \bar{U} , $\overline{\Delta U}$ を求めよ. 又, 関係式

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} cU$$

が成り立つことを確かめよ.

[40] 「導体中での電磁波の減衰」

(1) 導体中で電流密度はオームの法則で与えられ真電荷 ρ_e がない場合, Maxwell 方程式から次式を導出せよ.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \\ \Delta \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

(2) [37] のような半無限の導体に, 次の平面電磁波が垂直に入射しているとする.

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{e}_y B_0 e^{i(kz - \omega t)}. \end{cases} \quad (b)$$

導体内の電磁波も同様に表される. 導体内の k を ω で表せ. 又, E_0 と B_0 の関係も求めよ.

(3) 波数 k から電磁波の減衰の様子がわかる. $\sigma \gg \omega \varepsilon$ の場合では, 電磁波の振幅がどのように減衰するか.

電磁気学演習【第7回の最小知識】

12. 電磁波

- Maxwell 方程式をスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて表わすと、次のように簡単化できる。(問題 [38] 参照)

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{i}_e \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} c \equiv (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3.00 \times 10^8 \text{m/sec} : \text{光速} \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{[F/m]} \end{array} \right)$$

- 自由電磁波 ($\rho_e = 0, \mathbf{i}_e = 0$) では, $\phi = 0$ とできる.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

(自由平面波)

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left[\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right]$$

(\mathbf{k} : 波数ベクトル ω : 振動数)

- 導体中の電磁波

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}, \quad \rho_e = 0.$$

ジュール散逸により減衰する。(問題 [40] 参照)