物理数学第１演習Ｂ（第１回）

担当：田中秀和

[1]「Euler の公式，de Moivre の公式」
実数 x に対し，e^{ix} を次式で定義する．

$$e^{ix} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

このとき，次式を示せ．

(1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$　　　(Euler の公式)

(2)
- $e^{ix_1} e^{ix_2} = e^{i(x_1+x_2)}$　　　(x_1，x_2：実数)
- $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$　　　(de Moivre の公式)

[2]「複素共役，三角不等式」
任意の２つの複素数 z_1，z_2 に対して以下を示せ．

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$

(2) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

[3]「極形式」
次の複素数を極形式で表し，複素平面上に図示せよ．

(1) $(1+\sqrt{3}i)^5,$　　(2) $(1+i)^{-3},$　　(3) $\dfrac{1-i}{1+i}$

[4] Euler の公式又は de Moivre の公式を用いて以下を導出せよ．

(1) $$\begin{cases} \cos^3\theta = \dfrac{3}{4}\cos\theta + \dfrac{1}{4}\cos 3\theta, \\[2ex] \sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta. \end{cases}$$

(2) $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

[5] 次の方程式を解け.

(1) $z^5 = -32$ （解を複素平面上に図示）

(2) $z^2 = 1 + i$

(3) $z^2 = 5 - 12i$

(4) $z^2(1 - z^2) = 16$

(5) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

(6) $z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$

(7) $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$

[6] 次の各累乗根を求め，図示せよ.

(1) $1^{1/4}$, $1^{1/7}$

(2) $(-1 + i)^{1/3}$, $i^{2/3}$

[7] n 次方程式 $z^n = a$ は n 個の解を持つ．これらすべての解の和が 0 になることを示せ（$n \geq 2$).

[8] $|z| < 1$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ である．これを用いて，$|r| < 1$ のとき次式が成り立つことを示せ.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \end{cases}$$

[9] 実数係数の n 次方程式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1 = 0$$

において，$z = \alpha$ が一つの解であるならば $\bar{\alpha}$ も解であることを示せ.
（ヒント：$\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ をまず示す.）

物理数学第１演習Ｂ【第１回の最小知識】

1. 複素平面

   (i) 実部と虚部 $z = x + iy \quad (x, y : \text{実数})\ (\bar{z} = x - iy)$

   (ii) 極表示

   - $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r, \theta : \text{実数})$
     $(x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta)$
   - Euler の公式
     $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
     を用いると
     $$z = re^{i\theta}$$

2. 累乗根 $z^{1/n}$

   - 定義: $w^n = z$ に対する w の解
   - $z = re^{i\theta}$ とおくと，定義より
     $$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\exp[\frac{i}{n}(\theta + 2\pi k)] \quad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$
     （注意）累乗根 $z^{1/n}$ は n 個の値をとる．
   - 例：$8^{1/3} = 2, \quad 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

物理数学第１演習Ｂ（第２回）

担当：田中秀和

[10]「正則関数」
以下の関数 $f(z)$ に対し，導関数を求めることにより複素平面全体で正則であることを示せ．

(1) $f(z) = z^2 - 4iz + 3$

(2) $f(z) = z^n \qquad (n \geq 1$：整数$)$

[11]「Cauchy-Riemann の関係式」
Cauchy-Riemann の関係式を用いて，以下の関数 f の正則性を調べよ．

(1) $f = \bar{z}$

(2) $f = zRe(z)$

(3) $f = |z|^2$

(4) $f = e^x(\cos y + i \sin y)$

(5) $f = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

[12]「調和関数と正則性」
以下の関数 $u(x,y)$ が調和関数であることを示しこれらの u に対し，$f(z) = u + iv$ を正則とする $v(x,y)$ を求めよ．(このような u，v は (互いに他の) 共役関数といわれる．) さらに f を z で表せ．([13](2) は用いない．)

(1) $u = 2x(1-y)$

(2) $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$

(3) $u = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$

[13] 正則な関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ に対し，

(1) $\dfrac{df}{dz} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を示せ．

(2) $f(z) = 2u(\dfrac{z}{2}, -\dfrac{iz}{2}) +$ 定数 $\qquad$ (a)
を示せ．

(3) [12] の (1)∼(3) で求めた $f(z)$ が (a) 式を満たすことを確かめよ．

[14]「L'Hospital の公式」
正則関数 $f(z)$，$g(z)$ が，$f(z_0) = g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) \neq 0$ であるとき，次の L'Hospital の公式を示せ．

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

[15]「べき級数の収束半径」

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ に対し，係数 a_n が以下のように与えられる場合について，収束半径を求めよ．

(1) $a_n = n^{-n}$,　(2) $a_n = n^{\log n}$,

(3) $a_n = (\log n)^n$,　(4) $a_n = \dfrac{4n}{(n+1)^3}$,

(5) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$,　(6) $\begin{cases} a_n = 1 & (n = m^2 \quad [m：\text{自然数}]) \\ a_n = 0 & (\text{上以外の } n) \end{cases}$

[16]「指数関数」

複素関数において指数関数を次式で定義する．(「授業」での定義と異なるので注意.)

$$\exp z \equiv 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (b)$$

これに対し以下を示せ．

(1) 有限な z に対し，常に $\exp z$ は有限値を取る．

(2) $\dfrac{d}{dz} \exp z = \exp z$

(3) $\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$
(ヒント：$f(z) = \exp z \exp(a - z)$ を微分)

(4)
- $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy)$
- $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$
- $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$

[17]「三角関数」

三角関数 $\cos z$，$\sin z$ を次式で定義する．

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \qquad (c)$$

以下を示せ．

(1) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(2) 加法定理

$$\begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \end{cases}$$

(3) $\dfrac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \dfrac{d}{dz} \cos z = -\sin z$

物理数学第１演習Ｂ【第２回の最小知識】

3. 正則関数

- 定義：複素平面のある領域 D において，関数 $f(z)$ の微分係数
$$\frac{df}{dz} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
が常に存在するとき、$f(z)$ は領域 D において正則な関数である．
- 注意：関数 $w = f(z) \quad (= u(x,y) + iv(x,y))$ に対して微分係数
$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}$$
が存在していても，$f(z)$ は正則とは限らない．Cauchy-Riemann の関係式が成り立つことも必要．

（理由）
$\Delta f \equiv f(z+\Delta z) - f(z)$ について考える．2 次の微少量を無視すると
$$\Delta f \simeq \frac{df}{dz}\Delta z \simeq \frac{df}{dz}\Delta x + i\frac{df}{dz}\Delta y \tag{1}$$
一方，u と v を用いると，
$$\Delta f \simeq \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \tag{2}$$
となる．(1)，(2) 式右辺で，Δx と Δy の係数はそれぞれ等しくなければならない．この条件より Cauchy-Riemann の関係式が導かれる．

4. 級数の収束性

- 絶対収束級数：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ で，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ が収束するもの．
- 級数収束の判定法：
  (a) 比較法：$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ が収束し，かつ，$|u_n| \le |v_n|$ ならば，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は絶対収束．
  (b) 比率法：$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$ であるとき，$L < 1$ ならば絶対収束であり，$L > 1$ ならば発散．($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ でも同様に判定できる．)
- べき級数（$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$）の収束性：
半径 R の円の内部（$|z| < R$）で常に収束し，円外部では常に発散するという，**収束半径** R が存在する．
- 収束半径 R の求め方：
$$1/R = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \text{or} \quad 1/R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$$

物理数学第１演習Ｂ（第３回）

担当：田中秀和

[18]「べき級数の収束性」

(1) 「n 乗根法による収束判定」 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ が存在する場合，$L < 1$ ならば絶対収束し，$L > 1$ ならば発散することを示せ．

(2) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対して $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ が存在する場合，収束半径の公式，$1/R = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在する場合の収束半径の公式，$1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ を示せ．

[19] 「双曲線関数」
$\cosh z$、$\sinh z$ は次式で定義される．

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

以下を示せ．

(1) $\begin{cases} \sin(iz) = i \sinh z, & \cos(iz) = \cosh z \\ \sinh(iz) = i \sin z, & \cosh(iz) = \cos z \end{cases}$

(2)
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- $\dfrac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \dfrac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$
- $\begin{cases} \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \\ \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \end{cases}$
$\begin{cases} \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \\ \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \end{cases}$

(4) $\begin{cases} |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \\ |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \end{cases}$

[20]「対数関数」

(1) (複素) 対数関数 $w = u + iv = \log z$ は $w = e^z$ の逆関数として定義される．このとき $u = \log r$，$v = \theta + 2n\pi$ (n：任意の整数)（但し，$z = re^{i\theta}$）を示せ．（これより，$\log z$ は無限多価関数であることがわかる．）

(2) $e^{4z} = i$ を解け．

(3) $\log i$，$\log(\sqrt{3} - i)$ の値をすべて求めよ．

[21]「逆三角関数，逆双曲線関数」
以下を導出せよ（1/2 乗が２価であることに注意）.

(1) $\sin^{-1} z = \dfrac{1}{i}\log[iz + (1-z^2)^{1/2}]$

(2) $\cos^{-1} z = \dfrac{1}{i}\log[z + (z^2-1)^{1/2}]$

(3) $\begin{cases} \sinh^{-1} z = \log[z + (z^2+1)^{1/2}], \\ \cosh^{-1} z = \log[z + (z^2-1)^{1/2}] \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \tan^{-1} z = \dfrac{1}{2i}\log\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right), \\ \tanh^{1} z = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \end{cases}$

[22]「累乗関数」
関数 z^α （a：複素数）を exp と log を用いて表し，z^α の絶対値と偏角を求めよ.

[23] 次の方程式のすべての解を求めよ.

(1) $\sin z = 0$， $\sinh z = 0$

(2) $\cos z = 0$， $\cosh z = 0$

(3) $\cos(1/z) = 0$ (解を図示せよ.)

[24] 次の数の値をすべて求めよ.

(1) $\sin^{-1} 2$, (2) $\cos^{-1} i$, (3) $\cosh^{-1} i$,

(4) $\tan^{-1} 2i$, (5) i^i, (6) $1^{\sqrt{2}}$

[25]「線形微分方程式への応用（交流回路）」
実関数に対する微分方程式

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + Q/C = f(t)$$

について考える.（L, R, C は実数.）

(1) $f(t) = E_0 \cos\omega t$ （E_0, ω：実数）の場合，１つの解は

$$Q = \mathrm{Re}\left(\frac{E_0 e^{i\omega t}}{i\omega R - \omega^2 L + 1/C}\right)$$

で与えられることを示せ．また，この場合の一般解を求めよ.

(2) $f(t) = E_0\, e^{\gamma t}\cos\omega t$ （γ：実数）の場合に対し，同様にして一般解を求めよ.

物理数学第１演習Ｂ【第３回の最小知識】

5. 多価関数，分枝，Riemann 面

(1) 多価関数の例：累乗根

$$w = z^{1/4} \quad (w = z^4 \text{の逆関数}) = \sqrt[4]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

4 価の多価関数 . . . 一意に決まらない．

(2) 多価関数の 1 価関数化

(a) 分枝の導入多価関数をいくつかの 1 価関数（分枝）に分ける．
例：$w = f(z) = z^{1/4}$: 4 つの分枝からなる

$$\begin{cases} f_1 = \sqrt[4]{r} e^{i\frac{\theta}{4}} \\ f_2 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{i}{4}(\theta+2\pi)} \\ f_3 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{i}{4}(\theta+4\pi)} \\ f_4 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{i}{4}(\theta+6\pi)} \end{cases}$$

(b) Riemann 面の導入 (z の定義域を広げる)．
複素平面 → Riemann 面
例：$w = z^{1/4}$

- $0 \leq \theta < 8\pi$
- $z^{1/4}$ の Riemann 面は複素平面 4 枚からなる．
- Riemann 面の個々の平面をそれぞれ 1 つの分枝に対応させる．

(3) （無限）多価関数の例

$$\log z, \quad \sin^{-1} z, \quad \sinh^{-1} z, \quad z^\alpha \quad (\alpha : \text{複素数})$$

物理数学第１演習Ｂ（第４回）

担当：田中秀和

[26]「Green の定理」
下図の様な領域 D とそれを囲む閉曲線 C に対し，以下の（２次元の）Green の定理を証明せよ．

$$\oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

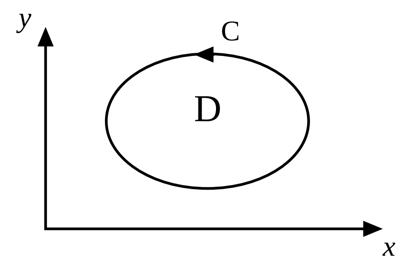

Figure 1

[27] 「Cauchy の定理」

(1) Green の定理を用いて，以下の Cauchy の定理を証明せよ．

「$f(z)$ が（単一）閉曲線 C の周上および内部で正則ならば，

$\oint_C f(z)dz = 0$ である．」

(2) $f(z)$ が（単連結）領域 D で正則であるとき，D 内の２点 a，b に対して線積分 $\int_a^b f(z)dz$ は２点を結ぶ経路には依らないことを Cauchy の 定理を用いて証明せよ．

(3) (2) と同様な場合に対し，以下を証明せよ．

$$F(z) = \int_a^z f(\eta)d\eta \quad \text{は領域 } D \text{ で正則であり，} \frac{d}{dz}F(z) = f(z)$$

[28] 円 $|z| = a$ を正の向きに一周する積分路 C に対し，($z = ae^{i\theta}$ とし）次の積分を実際に計算せよ．(但し n，m は整数，$z = x + iy$)

(1) $\oint_C z^2\overline{z}dz$,　(2) $\oint_C (z^2 - \frac{i}{z} + \frac{3}{z^3})dz$,　(3) $\oint_C z^n dz$,

(4) $\oint_C \overline{z}^m dz$,　(5) $\oint_C (x+y)dz$,

[29] z 平面の 4 つの頂点が（$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+i, -\frac{\pi}{2}+i, -\frac{\pi}{2}$) である長方形を正方向に一周する積分路 C に対し，次の積分を実際に計算せよ．

(1) $\oint_C e^{Re(z)}dz,$ (2) $\oint_C e^{Im(z)}dz,$ (3) $\oint_C Re(\cos z)dz,$

(4) $\oint_C Im(\cos z)dz,$ $\oint_C \cos z dz (= \oint_C Re(\cos z)dz + i\oint_C Im(\cos z)dz)$

[30] ガウスの発散定理，ストークスの定理

(1) 2 次元空間（平面）で定義されている関数 f に対し，次式を示せ．

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial x}dxdy = \int_C f n_x d\ell \qquad (a)$$

（但し，領域 S は閉曲線 C で囲まれている．又，$\boldsymbol{n}$ は閉曲線 C に対し，垂直で外向きの単位ベクトルであり，n_x はその x 成分である．）

(2) (a) 式を 3 次元空間に拡張したものである次式を示せ．

$$\int_V \frac{df}{dx}dV = \int_S f n_x dS \qquad (b)$$

又は

$$\int_V \mathrm{grad} f dV = \int_S f d\boldsymbol{S} \qquad (c)$$

(3) (a) 式又は (b) 式を用いて，以下のガウスの発散定理，ストークスの定理を証明せよ．

$$\begin{cases} \displaystyle\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A} dV = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \\ \displaystyle\int_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} \end{cases}$$

[31] Cauchy の積分公式より次の公式を示せ．

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad \text{(Goursat の公式)}$$

（これより，ある領域で正則な関数は，何回でも微分可能であることがわかる．）

[32] 閉曲線 $C: z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ $(\varepsilon \to 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して，Cauchy の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (a)$$

が成り立つことを，θ についての積分を行って確かめよ．

物理数学第１演習Ｂ【第４回の最小知識】

6. 複素線積分

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i$$

又は

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy)\\ &= \int_C udx - \int_C vdy + i(\int_C vdx + \int_C udy)\end{aligned}$$

7. Cauchy の定理など
$f(z)$ が単一閉曲線 C の周上および内部で正則である場合，以下の等式が成り立つ．

(1)

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad \text{(Cauchy の定理)}$$

この定理より，積分 $\int_a^b f(z)dz$ は経路には依らずに決まる．

(2)
- $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-a}dz$ （Cauchy の積分公式)
- $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ （Goursat の公式)

8. 正則関数の微積分

- 不定積分 $\int^z f(z)dz$ が定義できる（7(1) より)．
- （初等）関数 $f(z)$ の導関数と不定積分に対して，実関数の微積分におけるものと同じ公式が成り立つ．又，積の微分や合成関数の微分，部分積分に対しても，実数のときと同様な公式が成り立つ．

物理数学第１演習Ｂ（第５回）

担当教官：田中秀和

[33] 円 $|z| = 1$ に沿って，$\oint_C e^z dz$ を計算することにより，以下を示せ．

(1) $\displaystyle \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) d\theta = 0$

(2) $\displaystyle \int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \cos(\theta - \cos n\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \sin(\theta - \cos n\theta) d\theta = 0$

[34] [代数学の基本定理]

(1) $f(z)$ は中心 $z = a$，半径 r の円 C の内部及び周上で正則であるとする．このとき Cauchy の積分公式より，次の不等式（Cauchy の評価式）を証明せよ．

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{Mn!}{r^n} \quad (n \text{ は } 0 \text{ 又は正の整数}) \qquad (a)$$

但し，M は上の領域で $|f(z)| < M$ を満たす定数．

(2) (a) の不等式を用いて，次の Louiville の定理を証明せよ．
「複素平面 $|z| < \infty$ において，(i) $f(z)$ は正則で，かつ (ii)$f(z)$ は有界 ($|f(z)| < M$ を常に満たす M が存在する) ならば，$f(z)$ は定数である」

(3) Liouville の定理を用いて，次の代数学の基本定理を証明せよ．
「次数 $n \ge 1, \quad a_n \ne 0$ なる全ての代数方程式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$$

は少なくとも１つの解を持つ.」

(4) 全ての n 次の代数方程式は，ちょうど n 個の解を持つことを，代数学の基本定理を用いて示せ．

[35] 位数 n の極に対する留数の公式

$$Res f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$$

を Goursat の公式を用いて導出せよ．

[36] 次の関数の極をすべて求め，各極における留数を求めよ．

$$(1) \quad \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}, \quad (2) \quad \frac{1}{z^n+2}, \quad (3) \quad \frac{1}{\cos z}, \quad (4) \quad \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$$

[37] 次の周回積分を指定された閉曲線 C に対して求めよ．

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-1}dz \quad (C : \text{円 } |z| = 3)$

(2) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin 3z}{z+\pi/2}dz \quad (C : \text{円 } |z| = 3)$

(3) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz \quad (C : \text{円 } |z| = 3)$

(4) $\displaystyle\oint \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}dz \quad (C : \text{円 } |z| = 3)$

(5) $\displaystyle\oint \frac{\sin 6z}{(z-\pi/6)^3}dz \quad (C : \text{円 } |z| = 1)$

(6) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^4+1}dz$ （C : 頂点が $\pm a, \pm a + i2a$ の正方形．但し a は正の実数)

(7) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z^2+b^2)^5}$ （b : 実数， C : (6) と同じ)

[38] [37] の (6)，(7) の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{z^4+1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(z^2+b^2)^5}$$

物理数学第１演習Ｂ【第５回の最小知識】

9. 留数定理

(1) 留数

- $f(z)$ が C 内に 1 個の特異点 $z=a$ を持つとき，その点での留数 $Res\ f(a)$ を次式で定義する．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \times Res\ f(a) \qquad (a)$$

- [公式] 特異点 $z=a$ が $f(z)$ の n 位の極であるとき，留数は次式で与えられる．([35] 参照)

$$Res\ f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)] \qquad (b)$$

- $f(z)$ が C 内に n 個の特異点 $(a_1 \sim a_n)$ を含む場合，$f(z)$ の周回積分は次式で与えられる．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_i^n Res\ f(a_i) \quad \text{(留数定理)} \qquad (c)$$

(2) 周回積分の求め方

(i) 閉曲線 C 内の特異点（極）をすべて見つける．
(ii) 各特異点における留数 $Res\ f(a)$ を求める（(b) 式）．
(iii) (c) 式より周回積分が求まる．

(3) 特異点（非正則点）の種類

(i) 極　(例) $f(z)=(z-a)^{-n}$ に対し，$z=a$ は n 位の極
(ii) 除去可能な特異点　(例) $f(z)=\sin z/z$ に対する $z=0$
(iii) 真性特異点　(例) $f(z)=e^{1/z}$ に対する $z=0$
(iv) 分岐点　(例) $f(z)=z^{1/2}$ に対する $z=0$
(v) 集積特異点　(例) $f(z)=\dfrac{1}{\cos(1/z)}$ に対する $z=0$
（これに対し，(i)～(iv) は孤立特異点と分類される．）

物理数学第１演習Ｂ（第６回）

担当教官：田中秀和

[39] 関数列 $u_n(z)$ に対して，ある領域 D で常に $|u_n(z)| \leq M_n$ が成り立ち，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するような正の数列 M_n が存在するとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ は D で一様（かつ絶対）収束する（Weierstrass の M 判定法）．これを用いて次の各関数項級数が指定された領域で一様収束するかどうか調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$ （領域：$|z| \leq 1$），　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}$ （領域：$|z| \leq 1$），

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$ （領域：$1 < |z| < 2$）

[40] べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0 \quad (\neq 0)$ で収束するとき，以下を証明せよ．

(1) 上の級数は $|z| < |z_0|$ に対して絶対収束する.（ヒント：十分大きな n に対して $|a_n| < 1/|z_0|^n$ が成り立つことをまず示す.）

(2) $|z_1| < |z_0|$ とすれば $|z| \leq |z_1|$ において上の級数は一様収束する．

(3) 上の級数と，その各項の導関数を項とする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とは同じ収束半径を持つ.（これはべき級数の項別微分が可能であることを示している.）

[41] Taylor の定理「点 a を中心とする円 C の内部で $f(z)$ が正則ならば，円 C 内部のすべての点 z に対し，いわゆる Taylor 展開の式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

が成り立つ」を Cauchy の積分公式を用いて，証明せよ．

[42] Laurent の定理「点 a を中心とし，半径 $r_1,\quad r_2 \quad (r_1 > r_2)$ の２つの同心円 C_1，C_2 により囲まれた円環領域 D の内部及び境界上で $f(z)$ が正則ならば，領域 D 内のすべての点 z に対し，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \quad \text{(Laurent 展開)}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \\[2ex] a_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz \end{cases}$$

が成り立つ」を Cauchy の積分公式を用いて証明せよ．

[43] 次の関数を指定された点のまわりで Taylor 展開し，その収束半径を決定せよ．

(1) $\cos z \quad (z=\pi/2)$,　　(2) $\dfrac{1}{1+z} \quad (z=1)$,　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (z=0)$

[44] 次の各逆関数を $z=0$ のまわりで Taylor 展開し，その収束半径を決定せよ.（多価関数であるが $z=0$ での値が 0 である分枝を考える.）

(1) $\sin^{-1} z$　（ヒント : $(\sin^{-1} z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$),

(2) $\tan^{-1} z$,　　(3) $\sinh^{-1} z$,　$\tanh^{-1} z$

[45] 次の各関数を指定された特異点のまわりで Laurent 展開せよ．さらに特異点の種類，収束領域も求めよ．

(1) $\sin \dfrac{1}{z+2} \quad (z=-2)$,　(2) $\dfrac{\sin z - z}{z^3} \quad (z=0)$,　(3) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \quad (z=-2)$

[46] $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ を次の各領域において収束するように Laurent 展開せよ．

(1) $1<|z|<3$,　(2) $|z|>3$,　(3) $0<|z+1|<2$,　(4) $|z|<1$

物理数学第１演習Ｂ【第６回の最小知識】

10. Taylor 展開と Laurent 展開

(1) Taylor 展開：
正則点のまわりでのべき級数展開.（実数の場合と同様.）

(2) Laurent 展開：
（孤立）特異点のまわりでも展開できるよう一般化．一般に負のべきの項を含む.（問題 [42] を参照.）

$$\begin{cases} \text{主要部:} & \text{負のべきの部分} \\ \text{正則部分：} & \text{定数又は正のべきの部分} \end{cases}$$

(3) Laurent 展開による（孤立）特異点の分類

- 極：
Laurent 展開の負のべき（主要部）は $-n$ 乗まで $\Longleftrightarrow$ n 位の極
- 真性特異点：
Laurent 展開の主要部が無限に続く $\Longleftrightarrow$ 真性特異点
- 除去可能な特異点：
$z=a$ で $f(z)$ は定義されていないが，$\lim_{z\to a} f(z)$ は存在.（主要部はなし.）

物理数学第１演習Ｂ（第７回）

担当教官：田中秀和

[47]

(1) 図１の経路の半円部分（半径 R）C_1 の上で

$$|F(z)| \le M/R^k \quad (M, \quad k > 1 \quad \text{は定数}) \qquad (a)$$

が満たされている場合、$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} F(z)dz = 0$ を示せ。

(2) $k > 0$ に対し、(a) の不等式が成り立つ場合、$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} F(z)e^{imz}dz = 0$ を示せ。但し、m は正の実数。

（これらの結果は、以下の定積分計算で用いられる。）

[48] 複素周回積分を用いて、次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$,　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$,

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

[49] 複素積分を用いて次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$,　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$　(但し、$a > |b|$),

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^2}$　(但し、$a > |b|$)

[50] 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}dx$　(但し、$a > 0$),　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{x^4+x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$

[51] 複素積分を用いて以下の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$,　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

[52] $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて、

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{（Fresnel 積分）}$$

を示せ。（ヒント：図３のような扇型の経路 C に沿っての積分 $\oint_C e^{-z^2}dx$ を考える。）

[53] 図４の経路に沿っての積分 $\displaystyle\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z}dz$ を用いて以下を示せ。(注：z^{a-1} は多価関数なのでどの分枝を考えるかを指定する必要あり.）

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1,\quad \text{実数})$$

[54] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi \ln 2$ を示せ。

（ヒント：図１の経路 C に対し、$\displaystyle\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz$ を求める。）

[55] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh x}dx = \frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)} \quad (|a| < 1)$ を示せ。

（ヒント：４点 $\pm R$、$\pm R + \pi i$ を頂点に持つ長方形の経路 C に対し、$\displaystyle\oint_C \frac{e^{az}}{\cosh z}dz$ を求める。）

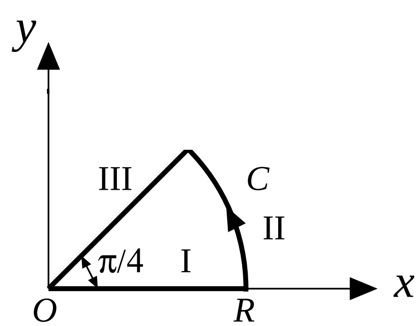

図３

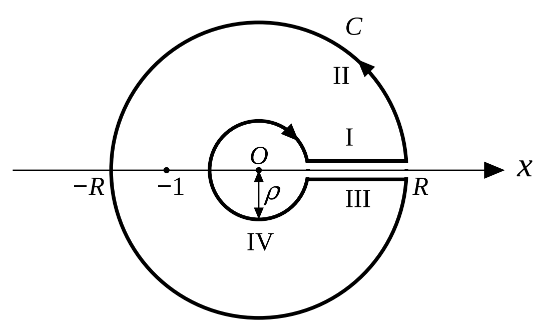

図４

物理数学第１演習Ｂ【第７回の最小知識】

11. 定積分計算

留数定理の重要な応用として実定積分の計算がある。適当な複素周回積分を用いて、定積分の値を求めることができるのである。以下にその典型的な例を挙げる。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx \quad (F(x)$:有理関数）：
図１の経路 C に沿っての積分 $\displaystyle\oint_C F(z)dz$ を考え、$r \to \infty$ とする。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta \quad (G$: $\sin\theta$、$\cos\theta$ の有理関数）：
$z = e^{i\theta}$ で上の積分を置換すれば、原点をまわる単位円 C についての積分 $\displaystyle\oint_C F(z)dz$ となる。

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin mx dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx dx \quad (F$: 有理関数)：
図１の経路 C に沿っての積分 $\displaystyle\oint_C F(z)e^{imz}dz$ を考える。

(4) (1) 又は (3) で実軸上で「極」を持つもの：
例：$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$
図２の様に実軸上の「極」を小さくよける経路に沿って積分。

(5) その他：
（問題 [52]〜[55] を参照）

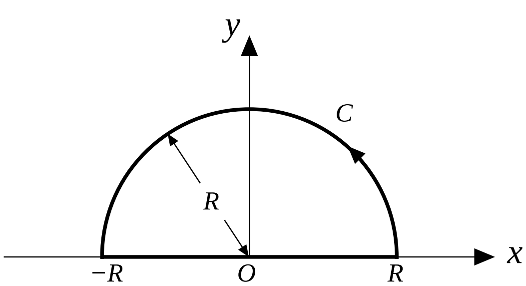

図１

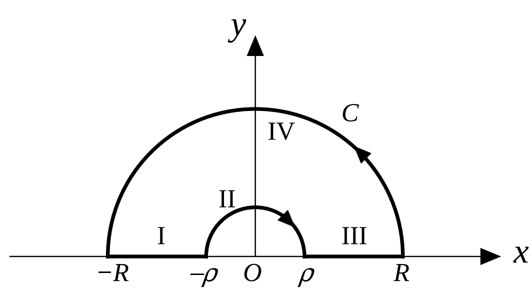

図２

物理数学第１演習Ｂ（第８回）

担当教官：田中秀和

[56] 級数総和に関する定理

(1) 図１のような正方形の経路 C_N （N：自然数）の上の z に対し、次の不等式が常に成り立つことを示せ。

$$|\cot \pi z| < 2$$

（ヒント：$|\cot \pi z| \leq \coth \pi |y|$ を示し、C_N の実軸に平行な部分に対してこれを用いる。）

(2) 関数 $f(z)$ は C_N 上で $|f(z)| \leq M/|z|^k \quad (k > 1)$ を満たすものとする。但し、M は N に依らない実数とする。このとき、

$$\lim_{N\to\infty} \oint_{C_N} \cot \pi z f(z) dz = 0$$

を示し、級数総和に関する定理「12(1)」を証明せよ。
($f(z)$ は有限個の極しか持たない場合のみでよい。)

(3) C_N 上で $|\sin \pi z| > 1/2$ が常に成り立つことを示せ。

(4) (2) と同じ（$f(z)$ に対する）条件の下で、定理「12(2)」を証明せよ。

(5) 同様にして、定理「12(3)」を示せ。

(6) 同様にして、定理「12(4)」を示せ。

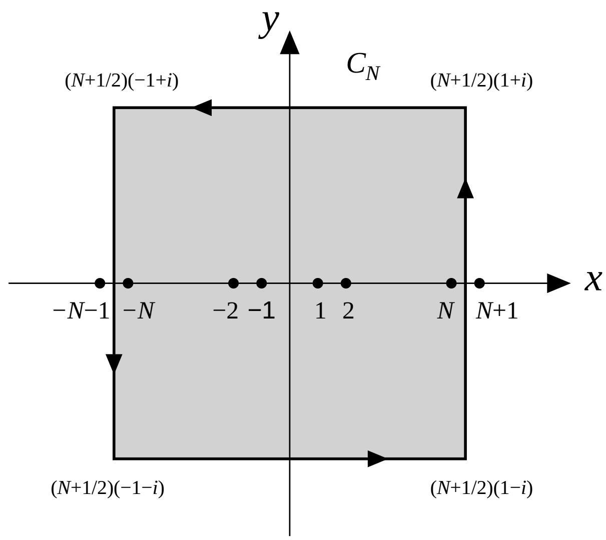

図１

[57] 以下を級数総和に関する定理を用いて示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth \pi a$

(2) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{1}{\sinh \pi a}$

(3) $\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(4) $\displaystyle\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{12}$

(5) $\displaystyle\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots = \frac{\pi^3}{32}$

(6) $\displaystyle\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots = \frac{\pi^4}{90}$

[58] Mittang-Leffler の展開定理を証明せよ。

[59] Mittag-Leffler の展開定理を用いて、以下を示せ。

(1) $\displaystyle\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{[\frac{(2n-1)\pi}{2}]^2 - z^2}$

(2) $\displaystyle\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}$

(3) 「$\sin z$ の無限乗積展開」

$\displaystyle\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n\pi})(1+\frac{z}{n\pi})$

(ヒント：$\displaystyle\frac{d}{dz}\log(\frac{\sin z}{z}) = \cot z - \frac{1}{2}$)

(4) $\displaystyle\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots = \frac{\pi}{2}$

物理数学第１演習Ｂ【第８回の最小知識】

12. 級数の総和法
次の級数に関する定理は、$f(z)$ に対する極めて弱い条件のもとで成り立つ（[56] 参照)。

(1) $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\{f(z)$ のすべての極における$\pi\cot(\pi z)f(z)$ の留数の総和 $\}$

(2) $\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n) = -\{f(z)$ のすべての極における$\pi\frac{1}{\sin(\pi z)}f(z)$ の留数の総和 $\}$

(3) $\sum_{-\infty}^{\infty} f(\frac{2n+1}{2}) = \{f(z)$ のすべての極における$\pi\tan(\pi z)f(z)$ の留数の総和 $\}$

(4) $\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n f(\frac{2n+1}{2}) = -\{f(z)$ のすべての極における$\pi\frac{1}{\cos(\pi z)}f(z)$ の留数の総和 $\}$

13. Mittag-Leffler の展開定理

(i) 関数 $f(z)$ は z 平面に無限に多くの特異点 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を持ち、それらはすべて１位の極であるとする。

(ii) 極 a_n は $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$ を満たすものとし、$z = a_n$ における留数を A_n とする。

(iii) 原点を中心とする半径が R_N でどの極も通らない円 C_N 上で $|f(z)| < M$ であるとする。ここに、M は N に依らない定数であり、$N \to \infty$ で $R_N \to \infty$ とする。

以上の (i)、(ii)、(iii) が満たされる場合、Mittag-Leffler の展開定理

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\}$$

が成り立つ。

14. １価関数の分類

I. 整関数：
$z = \infty$ を除いた全平面で正則な関数

(Ia) 有理整関数（n 次多項式のみ）... 有限個のゼロ点を持つ。

(Ib) 超越整関数 ... 無限個のゼロ点を持つ。（例：e^z、$\sin z$）

II. 有理型関数：
($z = \infty$ を除いた）全平面で特異点として極のみを持つもの（真性特異点を持たない)。

(IIa) 有理関数 ... 有限個の極を持つ。

(IIb) 超越有理型関数 ... 無限個の極を持つ（例：$\cot z$)。