全学教育科目「基礎物理学 I」

内容：

1. 放物運動と運動の表し方
2. ニュートンの運動の 3 法則
3. 仕事とエネルギー
4. 円運動と万有引力の法則
5. 角運動量とその保存則
6. 中心力場における運動
7. 惑星の運動
8. 質点系の運動
9. 剛体の運動

目標： 科学の基礎としての物理学を力学に重点をおいて概観する．物理学の基礎知識やその考え方の習得し，それにもとづいた自然に対する洞察力を養う．

成績評価： 期末試験６０％，レポート２０％，出席２０％の割合で成績を評価.

テキスト（簡易版）： 以下からダウンロード可.

http://risu.lowtem.hokudai.ac.jp/ hidekazu/class.html

1　放物運動と運動の表し方

1.1　落下運動の法則

鉛直方向 1 次元の等加速度運動

$$\text{加速度：}\quad a = -g \quad \text{（一定）}, \tag{1}$$

$$\text{速度：}\quad v = -g\,t + v_0, \tag{2}$$

$$\text{高さ：}\quad z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + z_0. \tag{3}$$

1.2　運動と微積分

- v-t グラフ：　傾き（微分）は加速度，面積（積分）は移動距離.
- z-t グラフ：　傾き（微分）は速度.

式にまとめると

$$\frac{dz}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = a, \tag{4}$$

$$z_1 - z_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt, \qquad v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt. \tag{5}$$

問題 1 高所からしずかにはなした物体が 180m だけ落下するのにかかる時間を求めよ．但し，重力加速度 g は $10\mathrm{m/s^2}$ とする．

問題 2 月の重力は地球の約 6 分の 1 である．このとき，ある距離落下するのに要する時間は月の場合地球の何倍になるか？

問題 3 地上から鉛直上方に速度 v_0 で物体を投げ上げた (t=0)．この場合の物体の最高到達高度 $z_{\max}$ と 対応する到達時間 $t_{\max}$ を求めよ．さらに，地上に落下するまでの任意の時間 t における物体の高さは次式で与えられることを示せ．

$$z = z_{\max} - \frac{1}{2}g(t - t_{\max})^2 \tag{6}$$

1.3 2 次元や 3 次元の運動

位置や運動を表すのにベクトルを用いる．

- 3 次元空間の位置： $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

  または各軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて次式のようにもかける．

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z. \tag{7}$$

- 速度：

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{8}$$

  ここで，両辺を成分に分解すると

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z, \tag{9}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z. \tag{10}$$

- 加速度：

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{11}$$

  ここで右辺を成分に分解すると

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{e}_z. \tag{12}$$

ベクトルを成分に分解して考えることができる．成分をもちいると 1 次元の結果を応用しやすい．

例：放物運動（斜め投射）

- 成分に分解して考える：

  ・水平方向（x）：等速運動 （v_x は一定）

$$a_x = 0, \tag{13}$$

$$v_x = v_{x0} \qquad (\text{一定}), \tag{14}$$

$$x = v_{x0}t + x_0. \tag{15}$$

  ・鉛直方向（z）：落下運動 （等加速度運動）

$$a_z = a_{z0} = -g \qquad (\text{一定}), \tag{16}$$

$$v_z = a_{z0}t + v_{z0}, \tag{17}$$

$$z = \frac{1}{2}a_{z0}t^2 + v_{z0}t + z_0. \tag{18}$$

投射角度を θ，初速を v_0 とした場合には

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{z0} = v_0 \sin\theta. \tag{19}$$

- 最高点の位置 $(x_{\max}, z_{\max})$ と到達する時間 $t_{\max}$：

$$x_{\max} = x_0 + \frac{v_{x0}v_{z0}}{g}, \tag{20}$$

$$z_{\max} = z_0 + \frac{v_{z0}^2}{2g}, \tag{21}$$

$$t_{\max} = \frac{v_{z0}}{g}. \tag{22}$$

放物運動の軌道は次のようにかける．

$$z = z_{\max} - \frac{g}{2v_{x0}^2}(x - x_{\max})^2 \tag{23}$$

問題 4 (23) 式を導け．

問題 5 ある地点からボールを投げて，x_1 だけ離れたところにある高さ z_1 の塀をこえるようにする．そのための最小の投射速度を求めよ．また，その際の水平からの投射角度 θ は，$\tan\alpha = z_1/x_1$ で定義される塀上端の仰角 α を用いて $\theta = \alpha/2 + \pi/4$ と与えられることも示せ．

2　ニュートンの3法則

2.1　第1法則：慣性の法則

「外から力がはたらかない限り、物体は静止，あるいは等速度運動を続ける.」

- 「力」とは物体の速度を変えるもの.
- アリストテレスの説の終焉.

2.2　第2法則：力と運動方程式

「物体の速度は，力により運動方程式にしたがって変化する.」

運動方程式：

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{24}$$

（加速度は力に比例し，質量に反比例.）

- 力の単位（次元）：　N(ニュートン) = kg m /s^2.
- 慣性質量と重力質量は等しい：
  アインシュタインの一般相対性理論（重力の理論）の基礎

運動量：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{25}$$

(24)，(25) 式より，運動方程式は次のようにも書ける：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}. \tag{26}$$

2.3　第3法則：作用反作用の法則と運動量保存

「相互作用する２つの物体は，互いに同じ大きさで反対方向の力を受ける.」

相互作用する２つの物体 $(m_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1)$，$(m_2, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_2)$ に対する運動方程式：

$$m_1\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{F}, \qquad m_2\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{F}. \qquad \text{（作用反作用の法則より）} \tag{27}$$

上の２式の両辺の和をとると

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = 0. \tag{28}$$

これは２つの物体の全運動量の保存を示している．より多数の物体の系でも同様.

運動量の保存は古典力学以外でも成り立つ一般的法則である．

- 相対論的力学における運動量：$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$
- 量子力学における光子の運動量： $p = h/\lambda$

２粒子の衝突：

運動量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ をもつ２つの粒子が衝突し，それぞれ運動量 $\boldsymbol{p}_1'$，$\boldsymbol{p}_2'$ となったとする．このとき，

$$\boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)dt \qquad (= \text{力積}), \tag{29}$$

$$\boldsymbol{p}_2' - \boldsymbol{p}_2 = -\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)dt. \tag{30}$$

上の２式より

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2'. \tag{31}$$

すなわち，衝突の前後で運動量は保存する．重心の運動が不変であることもわかる．

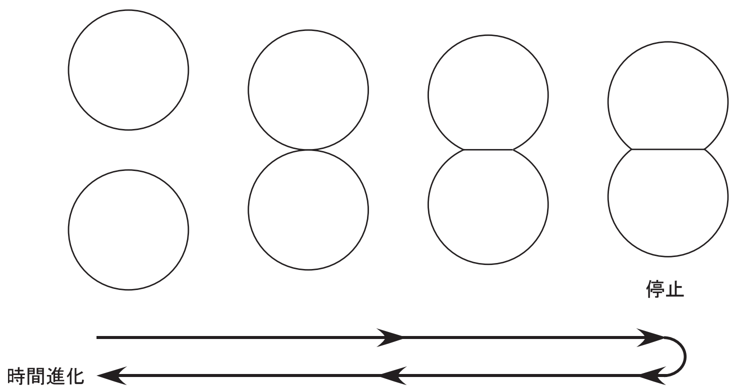

図１：２粒子の衝突の概念図

問題６ 「落下運動における空気抵抗の効果」　高所からしずかにはなした物体が，空気抵抗を受けながら落下した．空気抵抗の力は $-k\boldsymbol{v}$ （k は定数）で与えられ，重力加速度の大きさは g とする．

1. この運動に対する運動方程式を書き下せ．
2. 重力と空気抵抗がつりあったときの速度 v_t を求めよ．
3. 運動方程式の微分方程式をとき，物体の速度を時間の関数で表せ．
(物体の速度とつりあいの速度 v_t との差はどのように減少するか.）

3　仕事とエネルギー

3.1　仕事

- 物理学における仕事：　仕事　＝　力　×　移動した距離.

・「正確な定義」：　$d\boldsymbol{r}$ だけ移動したときの力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 dW

$$dW = F dx \cos\theta = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{32}$$

・有限移動距離の仕事

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{33}$$

- 注意点：
・(32) 式の $\cos\theta$ に注意．物理学における仕事は成果主義的.
・(33) 式の積分は始点終点だけでなく経路にも依存することがある.

- 例：　一定重力場がする仕事，　$dW = -mgdz$,　$W = -mg(z_2 - z_1)$.

- 仕事率

$$P = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{34}$$

3.2　運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

- 運動エネルギーの定義:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{35}$$

- 運動エネルギーと仕事

・力を受けた物体の運動エネルギーの変化率

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \qquad (=\text{仕事率}). \tag{36}$$

・積分形

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = W(t) \tag{37}$$

「された仕事の分だけ運動エネルギーは増加，または減少する.」

- ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）

・ポテンシャルエネルギーとは力場が物体にすることが可能な仕事の大きさ.

・定義

$$dU = -\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad U(\boldsymbol{r}) = \int^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{38}$$

（注：ポテンシャルエネルギーが定義できるのは保存力場のみ.）

力場が物体に仕事をすると，その分ポテンシャルエネルギーは減少する.

- 保存力場

・保存力場とは

1. ポテンシャルエネルギーが（座標の一価関数として）与えられる．
2. 力場はポテンシャルエネルギーの勾配（gradient）の逆符号に等しい：

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

   または

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, U = -\nabla U \tag{40}$$

3. 保存力場による仕事は経路によらず始点と終点の位置で決まる．

・保存力場の例：　ばね，クーロン力場，万有引力場

（摩擦力，空気抵抗は非保存力場）

3.3　力学的エネルギーの保存

保存力場の中にある物体の運動エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \\ &= -\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}U = -\frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t)). \end{aligned} \tag{41}$$

よって

$$\frac{d}{dt}(K+U) = 0. \tag{42}$$

すなわち，全力学的エネルギーは一定のまま保存される．

問題 7　一次元ばねの力は，$F = -kx$ で与えられる．(x はばねの伸び，k はばね定数.) このとき，ばねのポテンシャルエネルギーはどのようにかけるか．

問題 8　万有引力やクーロン力などの 3 次元力場のポテンシャルエネルギーは，$-k/|\mathbf{r}|$（k は定数）で与えられる．

1. このような力場の力の表式をベクトルでかけ．
2. 地球重力場内の物体のポテンシャルエネルギーは上の形で与えられる．地球表面での重力加速度は $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ であり，地球半径は 6400km である．これより，1kg の物体にはたらく地球重力に対する定数 k の値を求めよ．また，地球表面から物体を上に投げ上げるとき，地球重力をふりきり地球から離れていくための最小速度（脱出速度）を求めよ．

4　円運動と万有引力の法則

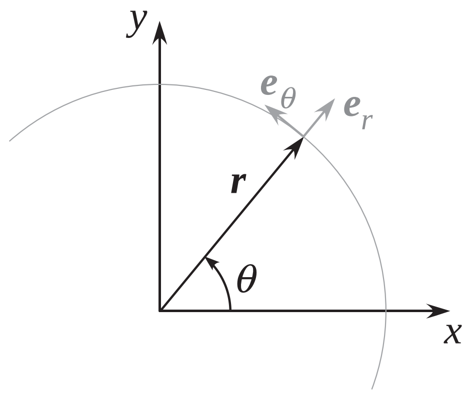

図 2：2 次元極座標

4.1　等速円運動と 2 次元極座標

- 等速円運動：

　・$r =$ 一定,　　$\theta = \omega t$　　(ω：角速度 (一定)).

　・座標，速度，加速度：

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{43}$$

$$\boldsymbol{r} = r\cos\theta\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\boldsymbol{e}_y. \tag{44}$$

$$\boldsymbol{v} = \omega r\boldsymbol{e}_\theta, \qquad \boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{45}$$

　・等速円運動の向心力：

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{46}$$

- 速度，加速度の表式 (45) の導出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} &= -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_y \\ &= \omega r(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y).\end{aligned} \tag{47}$$

　さらに，　$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y$　を用いて

$$\boldsymbol{v} = \omega r\boldsymbol{e}_\theta. \tag{48}$$

　加速度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \omega^2 r(-\cos\theta\boldsymbol{e}_x - \sin\theta\boldsymbol{e}_y) \\ &= -\omega^2\boldsymbol{r}.\end{aligned} \tag{49}$$

4.2　ばねによるおもりの単振動

ばね定数 k のばねにつながっている質量 m のおもりの一次元運動

- 運動方程式:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{50}$$

- 上の方程式は等速円運動の運動方程式の x 成分 $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ と似ていることから，次の解を得る

$$x = A\cos\omega t, \qquad \omega = \sqrt{k/m}. \tag{51}$$

- 単振動の速度，運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー：

$$v = -\omega A\sin\omega t, \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t, \quad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t.$$

$$\therefore K + U = \text{一定}. \tag{52}$$

4.3　万有引力の法則

- 質点間にはたらく重力とポテンシャルエネルギー

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}, \qquad U = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}. \tag{53}$$

$$(G = 6.7\times 10^{-11}\mathrm{N\ m^2/kg^{-2}}\text{：万有引力定数})$$

- 任意の物体がつくる重力ポテンシャルエネルギー：
  物体の内部各点の密度が $\rho(x,y,z)$ で与えられるとすると

$$U(\boldsymbol{r}_2) = -\int_V \frac{Gm_2\,\rho(x,y,z)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}|}dxdydz. \tag{54}$$

- 球対称の物体がつくる重力場　$(\rho = \rho(r))$
  - ・物体外部の重力場：
    物体の中心にある等質量の質点がつくる重力場と同じ.
  - ・物体内部の重力場：
    物体の中心から距離 r の点につくられる重力は, 半径 r の球内部に含まれる質量に等しい質点がつくる重力と同じ.

問題 9 地球を半径 R で内部密度が一様な球とする．いま，地表のある地点から地球中心を通り，裏側の地表まで貫くまっすぐなトンネルをつくった．質量 m の質点を地表からこのトンネルに初速度 0 で落下させた．この質点の運動について考える．

1. 地球中心から距離 r の点にいる質点が受ける力を求めて，物体の運動方程式を書き下せ．その際，万有引力定数 G と地球質量 M を用いること．
2. 運動方程式を解いて，物体の中心からの距離 r を時間 t の関数として表せ.
3. 物体の運動エネルギーと地球重力によるポテンシャルエネルギーを r の関数として求めよ.（地球表面でのポテンシャルエネルギーは $-GmM/R$ である.）

5　角運動量とその保存則

- 外積（ベクトル積）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

  ・定義：大きさが $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ (θ はベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ のなす角) で，
  方向が $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ右ねじを回したときのねじの進む方向
  で決まるベクトル.

  ・公式：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0, \qquad \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}. \tag{55}$$

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y. \tag{56}$$

  ・成分：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{e}_y + (A_x B_y - A_y B_z)\boldsymbol{e}_z. \tag{57}$$

- 角運動量とその変化

  ・角運動量の定義：$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$.

  ・角運動量の変化とトルク：

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad (\equiv \boldsymbol{N}). \tag{58}$$

  右辺 ($\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$) は力のモーメントまたはトルクと呼ばれる.

- 中心力場での角運動量保存

  中心力場 ($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$) を仮定すると

$$\boldsymbol{N} = 0, \qquad \therefore \boldsymbol{L} = \text{一定}. \tag{59}$$

  よって，中心力場において質点の角運動量は保存される.

問題 10 (57) 式を導出せよ.

6　中心力場における運動

4 章では中心力場における運動の１つとして円運動を紹介したが，ここでは一般的な場合の 2 次元運動について述べる.

- ２次元極座標 (r, θ) における速度と加速度：

  (43) 式を時間微分して ($\dot{r} \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}. \tag{60}$$

さらに微分して

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

ここで

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \quad \cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_y. \end{cases} \tag{62}$$

より，ベクトルの r 成分と θ 成分は一般に次で与えられる．

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}. \tag{63}$$

これを用いると (60) 式，(61) 式より

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

- 中心力場における運動方程式の極座標表示

  中心力場 $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{e}_r$ に対する運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = f(r)\boldsymbol{e}_r$ に (64) 式の加速度の表式を用いると

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \ = f(r), \tag{65}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \tag{66}$$

- 角運動量保存

  運動方程式の θ 成分 ([66] 式) より

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL_z}{dt} = 0. \tag{67}$$

- 全エネルギーの保存

  角運動量 L_z とポテンシャルエネルギー $U(r)$ を用いて (65) を書きかえると $f(r) = -(dU/dr)$ より

$$m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = 0. \tag{68}$$

  これに両辺 $\dot{r}$ をかけると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + U(r)\right) = 0. \tag{69}$$

  よって，全エネルギー（力学的エネルギー）は次式で与えられ一定．

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad \left(= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + U(r)\right) \tag{70}$$

問題 11 $L_z = mr^2\dot{\theta}$ を示せ．また，(69) 式を導出せよ．

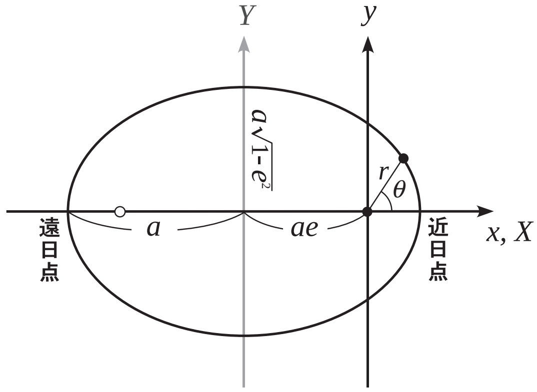

図 3：楕円軌道

7　惑星の運動

7.1　楕円軌道

- ケプラーの第 1 法則：惑星は，太陽を焦点にもつ楕円軌道上を動く（証明は後で）.
- 楕円軌道の式：
  軌道面を x-y 平面，近日点を x 軸上にとると

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1. \tag{71}$$

上式で，a は軌道長半径で，e は離心率．これらは軌道要素と呼ばれる．
太陽から近日点までの距離は $a(1-e)$，遠日点までの距離は $a(1+e)$（図 3 参照）.
さらに，(43) 式を用いて (71) 式を極座標で表し，r について解くと

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{72}$$

問題 12 (72) 式を (71) 式より導出せよ.

7.2　運動方程式による軌道の導出

太陽重力は中心力と近似できるので，$U=-GMm/r$ として，前章の結果が使える.

- ケプラーの第 2 法則（面積速度一定）：これは角運動量 $mr^2\dot{\theta}=$ 一定より明らか.
- 運動の定数 E, L_z と軌道要素 a, e

  全エネルギーの表式は，$U=-GMm/r$ として

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L_z^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r} \tag{73}$$

近日点と遠日点において，$\dot{r}=0$ であり，上式より

$$r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{L_z^2}{2mE}=0. \tag{74}$$

この 2 次方程式の 2 つの解は $a(1-e)$ と $a(1+e)$ なので，解と係数の関係より次の 2 式を得る.

$$E=-\frac{GMm}{2a}, \tag{75}$$

$$L_z=m\sqrt{GMa(1-e^2)}. \tag{76}$$

- 軌道周期

  軌道周期 T は，楕円の面積を面積速度 $r^2\dot{\theta}/2 = L_z/(2m)$（一定）で割ることにより得られる．すなわち

$$T = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{L_z/(2m)} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}. \tag{77}$$

  ここで (76) 式を用いた．この式はケプラーの第 3 法則（公転周期は軌道長半径の 3/2 乗に比例）を満たしている．

- 楕円軌道の式 (72) の導出

  (68) 式より

$$\ddot{r} = \frac{L_z^2}{m^2r^3} - \frac{GM}{r^2}. \tag{78}$$

  この左辺を θ に関する微分に変える．$u \equiv 1/r$ を用いると

$$\dot{r} = \dot{\theta}\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{L_z}{mr^2}\,\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L_z}{m}\,\frac{du}{d\theta}. \tag{79}$$

  さらに

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L_z}{m}\,\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L_z}{m}\,\dot{\theta}\,\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L_z^2}{m^2r^2}\,\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{80}$$

  これを (78) に代入して次式を得る．

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{GMm^2}{L_z^2}. \tag{81}$$

  この方程式で $u' = u - GMm^2/L_z^2$ と変数変換すると

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} = -u'. \tag{82}$$

  この方程式の一般解は

$$u' = u - \frac{GMm^2}{L_z^2} = A\cos(\theta - \theta_0). \tag{83}$$

  この解で，角運動量 L_z は (76) 式で与えられ，さらに，$A = e/[a(1-e^2)]$，$\theta_0 = 0$ とすると，楕円の式 (72) を得る．

問題 13 (75) 式と (76) 式を導出せよ．

問題 14 (73) 式からも (72) 式を導出できる．(73) 式で (79)，(75)，(76) の各式を用いることで，$(du/d\theta)$ を u と a，e で表せ．さらに，この得られた式を (72) 式の軌道が満たすことを示せ．

8　質点系の運動

8.1　2体の運動

2体の間の相互作用のみが働き他からの外力がない場合における2体の運動を考える．

- 相互作用（内力）
  $\boldsymbol{F}_{12}$：粒子2から粒子1に働く力．作用反作用より $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$.
  また，相互作用は2粒子の相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ の関数であるとする．

- 運動方程式
$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21}. \tag{84}$$

- 運動量保存
  (84) の2式の和から2体の全運動量保存が示される．
$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} \right) = 0. \tag{85}$$

- 重心（質量中心）とその運動 $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$
$$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} \equiv \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m2}. \tag{86}$$
  重心と全質量 $M = m_1 + m_2$ をつかって (85) 式を表すと
$$\frac{d}{dt}(M\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{G}) = 0. \tag{87}$$

- 相対運動の方程式
  相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ の方程式は，(84) の2つの式をそれぞれの質量で割り，第2式から第1式を引くと得られる．さらに，$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ を用いて
$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r}), \quad \text{または} \quad \mu \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r}). \tag{88}$$
  ここで,
$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{89}$$
  は換算質量とよばれる．

問題 15　太陽 (質量 M) と惑星 (質量 m) の相互作用のポテンシャルエネルギーは $U = -GMm/r$ である．これを用いて，これら2体の相対運動の方程式を書き下せ．

8.2　多体系の運動

N 個の質点の系の運動を考える．内力 (相互作用) $\boldsymbol{F}_{ij}$ とともに各質点に外力 $\boldsymbol{f}_i$ も働くものとする．$(i, j = 1 \sim N.)$

- 運動方程式

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{f}_i. \tag{90}$$

- 重心（質量中心）

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i. \qquad (\because M = \sum_i m_i) \tag{91}$$

- 全運動量 $\boldsymbol{P}$ $(= \sum_i \boldsymbol{p}_i)$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M \frac{d^2 \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{f}_i. \tag{92}$$

全運動量は外力の和で変化する．内力は作用反作用の法則のため打ち消し合う．

- 全角運動量 $\boldsymbol{L}$ $(= \sum_i \boldsymbol{l}_i)$

各質点の角運動量 $\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ に対する方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j \neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i. \tag{93}$$

上式で各質点 i に関する和をとると全角運動量についての式が得られる．さらに，相互作用が中心力 $(\boldsymbol{F}_{ij} /\!/ (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j))$ である場合には

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0 \tag{94}$$

であるので

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i \tag{95}$$

となり，全角運動量は外力によるトルクによってのみ変化する．

- 全力学的エネルギー E

相互作用のポテンシャルを $U_{ij}(\boldsymbol{r}_{ij})$，外力のポテンシャルを $U_i(\boldsymbol{r}_i)$ で表すと
全力学的エネルギーの保存を示す次式が得られる．(但し，$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{v}_i|^2 + \sum_i \sum_{j<i} U_{ij}(\boldsymbol{r}_{ij}) + \sum_i U_i(\boldsymbol{r}_i) \right] = 0. \tag{96}$$

問題 16　(90) 式を用いて全力学的エネルギー保存の式 (96) を示せ.

9　剛体の運動

9.1　剛体の定義

- **質点：** 大きさが無限小で質量をもつ物体．位置のみで運動が決まる．

- **大きさ有限の物体：** 重心の運動の他に内部運動（回転・振動など）もおこる．
（例：ゴムボール、質点系）

- **剛体：** 内部の各部分の間の距離が不変である物体 (形状や大きさが不変)．
重心の運動と回転運動の 2 つで運動が決まる．

この章では剛体の 2 次元運動を考える．

9.2　剛体の固定軸まわりの回転運動

- **剛体の速度場**
（固定）回転軸を z 軸にとり，剛体をその軸のまわりに角速度 Ω で回転させる．このとき，剛体の各部分の速度は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{v} = \Omega\, r\, \boldsymbol{e}_\theta, \qquad \text{又は,} \qquad v_x = -\,\Omega\, y, \quad v_y = \Omega\, x, \quad v_z = 0. \tag{97}$$

あるいは，角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_z$ を用いて，次式のようにも書くことができる．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{98}$$

- **剛体の角運動量と慣性モーメント**
剛体を多数の小部分に分け，i 番目の小部分の質量を m_i，位置を $\boldsymbol{r}_i$ とすると，剛体はこれら小部分の「多体系」(§§8.2) と考えることができる．
例えば，剛体の角運動量は各部分の角運動量の足し合わせで求まる．

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i. \tag{99}$$

これに上の速度場を用いると，次式のように書くことができる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \left(\sum_i m_i\, r_i^2 \right) \Omega\, \boldsymbol{e}_z \\ &= I_z\, \Omega\, \boldsymbol{e}_z. \end{aligned} \tag{100}$$

すなわち，剛体の角運動量は回転角速度 Ω に比例する．上式において I_z は（z 軸まわりの）慣性モーメントとよばれ，次式で定義される．

$$I_z = \sum_i m_i\, r_i^2. \tag{101}$$

- **剛体の回転運動エネルギーと慣性モーメント：**

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{v}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\Omega r_i)^2 = \frac{1}{2} I_z \Omega^2. \tag{102}$$

すなわち，剛体の回転の運動エネルギーは，慣性モーメントで表わすことができ，角速度の 2 乗に比例する．

- **慣性モーメントに対する平行軸の定理**

剛体の慣性モーメントは軸の位置に依存する．剛体の重心 $\boldsymbol{r}_G$ を通る軸に関する慣性モーメントが $I_{G,z}$ である場合，この軸に平行で距離 h だけ離れた軸に関する慣性モーメントは $I_{G,z} + h^2 M$ で与えられる．(但し，M は剛体の質量)

- **さまざまな剛体の慣性モーメント**

慣性モーメントを (101) 式のように和で与えたが，次式のように密度 ρ を用いて積分で表すこともできる．

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dxdydz \tag{103}$$

この式を用いて様々な形状をもつ剛体の慣性モーメントを計算することができる．(剛体質量は $M = \int \rho\, dxdydz$ である．)

各種剛体の重心を通る軸に関する慣性モーメントは以下のように得られる．

・長さ $2a$ の棒： $$I_{G,z} = \frac{1}{3} a^2 M \tag{104}$$

・半径 a の円環： $$I_{G,z} = a^2 M \tag{105}$$

・半径 a の円盤： $$I_{G,z} = \frac{1}{2} a^2 M \tag{106}$$

・半径 a の球： $$I_{G,z} = \frac{2}{5} a^2 M \tag{107}$$

- **剛体の運動方程式**

角運動量の表式 (100) と (95) 式から，角速度 Ω に対する次の方程式を得る．

$$I_z \frac{d\Omega}{dt} = N_z \tag{108}$$

上式で，N_z は剛体に働く全トルク $\boldsymbol{N}$ の z 成分である．

問題 17 慣性モーメントに対する平行軸の定理を証明せよ．

問題 18 棒，円盤，球の慣性モーメントの表式を (103) 式を使って導出せよ．

問題 19 フィギュアスケートのスピンでは，スケーターが広げていた腕を身体に引き寄せることで回転角速度を増加させる．このようにできる理由を慣性モーメントの考え方を用いて説明せよ．

9.3 剛体の一般的な（2 次元）運動

§§9.2 では剛体の回転軸が固定されている場合を考えた．一般の場合においては，剛体の運動は重心運動と重心を通る軸のまわりの回転運動との重ね合わせで表される．

- **速度場**

  剛体の重心剛体の各部分の位置や速度を重心のものとそれからのずれの和で表す.

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}'_i, \qquad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}'_i. \tag{109}$$

  このとき，重心の定義よりずれの位置と速度に対して次式が成り立つ．

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = 0, \qquad \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i = 0. \tag{110}$$

  剛体の場合，ずれの速度 $\boldsymbol{v}'_i$ は前節と同様に回転運動で与えられる．

$$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}'_i = \Omega\, r_i\, \boldsymbol{e}_\theta. \tag{111}$$

- **運動量**

  剛体の運動量 $\boldsymbol{P}$ は，多体系の場合と同様に重心の速度で決まる．

$$\boldsymbol{P} = M \boldsymbol{v}_G \tag{112}$$

- **角運動量**

  剛体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，重心の角運動量と重心を通る軸まわりの回転角運動量の和で与えられる．

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = M \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{v}_G + I_{G,z}\, \Omega \boldsymbol{e}_z. \tag{113}$$

- **運動エネルギー**

  剛体のエネルギー E は，重心の運動エネルギーと重心を通る軸まわりの回転エネルギーの和で与えられる．

$$E = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, |\boldsymbol{v}_i|^2 = \frac{1}{2}\, M\, |\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\, I_{G,z}\, \Omega^2. \tag{114}$$

- **運動方程式（2 次元の場合）**

  一般の 2 次元問題は，回転角速度 Ω に対する方程式 (108) と以下の重心に対する方程式を用いて解かれる．

$$M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = F_x, \qquad M \frac{d^2 y_G}{dt^2} = F_y. \tag{115}$$

  上式で，F_x, F_y は剛体に働く合力 $\boldsymbol{F}$ の x 成分と y 成分である．

問題 20　斜面を転がる回転体の運動 角度 α の傾きをもつ斜面を質量 M，慣性モーメント I_G をもつ半径 a の球形の剛体が転がり落ちる運動を考える．斜面に沿って下向きを x 軸，斜面に垂直な方向（斜め下向き）を y 軸にとる．

1. 剛体球には，重力 (大きさ Mg) , 摩擦力（大きさ F)，抗力（大きさ N) が働く．これらの力の各成分を求め，剛体球の重心に対する運動方程式と回転角速度 Ω に対する方程式を書き下せ．
2. 剛体球は滑らずに転がるとすると $v_{G,x} = a\Omega$ という関係式が成り立つことを示せ．
3. 滑らずに転がる場合について，剛体球の重心の x 方向の加速度と摩擦力 F をそれぞれ M，I_G，a，g，α の 5 つの量を用いて表せ．また，慣性モーメントが大きい球ほど落下の加速度が小さくなり摩擦力 F は大きくなることを示せ．

略解

1. 重心の運動方程式は

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F, \tag{116}$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2} = Mg\cos\alpha - N. \tag{117}$$

角速度に対する方程式は

$$I_g\frac{d\Omega}{dt} = aF. \tag{118}$$

2. 剛体球が斜面を滑らず転がる場合，剛体が角度 θ だけ回転すると，剛体球と斜面の接触点は斜面を $a\theta$ だけ移動する．剛体球の重心と接触点は x 座標は同じなので，結局

$$v_{G,x} = a\dot{\theta} = a\Omega. \tag{119}$$

3. (116)，(118)，(119) の 3 つの式から F と Ω を消去すると

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{a^2M}{a^2M + I_G}g\sin\alpha \tag{120}$$

が得られ，これが求める加速度の表式である．一方，摩擦力 F は

$$F = \frac{I_G}{a^2M + I_G}g\sin\alpha \tag{121}$$

これらの表式より，慣性モーメント I_G が大きいほど落下の加速度は小さくなり，摩擦力は大きくなることがわかる．