惑星形成論の基礎

Contents

1 分子雲の重力収縮と Jeans 安定性解析

分子雲の自己重力収縮を念頭において，空間一様なガスが自己重力によって分裂するための条件を調べる：一様ガスの自己重力安定性解析

1.1 基礎方程式

自己重力流体の方程式．熱輸送，粘性，回転，磁場などは無視.

- 連続の式, Eq. of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.1}$$

- オイラー方程式, Euler's eq.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi. \tag{1.2}$$

- ポアソン方程式, Poisson's eq.

$$\triangle \Phi = 4\pi G \rho. \tag{1.3}$$

1.2 線形摂動と安定性解析

もとの状態（非摂動状態）として，静止した密度、温度が一様なガスを考える．一様等方性より非摂動状態で自己重力は働かないと仮定する[1]． $(\rho_0 = p_0 = \text{const.}, \quad \boldsymbol{v}_0 = \Phi_0 = 0.)$

[1]非摂動状態に対する重力平衡の仮定は厳密には正しくない．しかしながら，他の効果が働くより現実的な平衡状態における自己重力不安定性を理解する上で，単純なジーンズの不安定性の結果は役に立つ．

(a) 摂動量：$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1, \quad \Phi = \Phi_1.$

(b) 摂動方程式 (摂動量の 2 次以上の項は無視)

- Eq. of continuity
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0. \tag{1.4}$$

- Euler's eq.
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1. \tag{1.5}$$

- Poisson's eq.
$$\triangle \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \tag{1.6}$$

- Eq. of state
$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho_1 = c_s^2 \, \rho_1. \tag{1.7}$$

(c) 線形解

$[\frac{\partial}{\partial t}$ (1.4) 式 $-\rho_0 \nabla \cdot$ (1.5) 式] に，(1.6) 式を代入して

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_1 - c_s^2 \triangle \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0. \tag{1.8}$$

この方程式の解を次の形におく.

$$\rho_1 = C \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t).$$

これより，次の分散関係を得る

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \tag{1.9}$$

ω が実数ならば安定，虚数ならば不安定なので

$$k < k_{\rm J} \equiv \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s} \quad \longrightarrow \quad \text{不安定} \tag{1.10}$$

- Jeans length $\quad \lambda_{\rm J} = \dfrac{2\pi}{k_{\rm J}} = \sqrt{\dfrac{\pi c_s^2}{G\rho_0}} \qquad$ (収縮時間：$\dfrac{\lambda_{\rm J}}{c_{\rm s}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{G\rho_0}}$)
- Jeans mass $\quad M_{\rm J} \simeq \dfrac{4\pi}{3}\rho_0(\lambda_{\rm J}/2)^3$

1.3 分子雲の重力収縮への応用

分子雲 (Molecular Cloud)，例：Orion[1500 光年], Taurus[450 光年]

密度： 水素原子 100-10^4 コ/cm^3 $\sim 10^{-22}$-10^{-21}g/cm^3.
大きさ: 数十-数百光年.
質量： 10^4-10^7 M$_\odot$ $\quad$ (M$_\odot = 2 \times 10^{33}$g).
温度： 10-30K (音速：200-300m/sec).

- Jeans length $\quad \lambda_{\rm J} \sim 10^{19}$cm $\sim$10 光年.
- Jeans mass $\quad M_{\rm J} \sim$ 数 10M$_\odot$

- 重力収縮の定性的進化
  $\lambda_{\rm J},\ M_{\rm J}\ \propto \rho^{-1/2}$ 　　(等温)

  密度の高い領域ほど短い波長のモードが発達し，小さな質量の天体へ分裂する．

2　原始惑星系円盤の構造と自己重力不安定性

原始惑星系円盤：若い星の周りを回るガス円盤．惑星形成の場．

- 降着円盤 (accretion disk)
- passive disk (主に中心星輻射で加熱)（$\leftrightarrow$ active disk)

ここでは，ガス円盤の局所自己重力不安定性を調べる．

2.1　基礎方程式 (円筒座標系)

面密度 $\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz,$ 　2 次元圧力 $P = \int_{-\infty}^{\infty} p dz;$ 　$v_z = 0,\quad \partial \boldsymbol{v}/\partial z \sim 0$

- Eq. of continuity

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \phi}(\Sigma v_\phi) = 0 \tag{2.1}$$

- Euler's eq.

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R}\frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial R} - \frac{GM_\odot}{R^2} - \frac{\partial \Phi_{\rm D}}{\partial R} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\phi}{R} = -\frac{1}{R\Sigma}\frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi_{\rm D}}{\partial \phi} \tag{2.3}$$

- Poisson's eq.

$$\triangle \Phi_{\rm D} = 4\pi G\Sigma\delta(z) \tag{2.4}$$

2.2　円盤の鉛直静水圧構造

- 薄い円盤に対し，鉛直方向の静水圧方程式はオイラー方程式の z 成分より

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\Omega'^2 z \tag{2.5}$$

  と書ける．ここで，鉛直方向の角振動数 Ω' は次式で定義される．

$$\Omega'^2 = \frac{GM_c}{R^3} + \frac{\partial^2 \Phi_{\rm D}}{\partial z^2}(z=0). \tag{2.6}$$

  円盤重力が無視できる場合，Ω' はケプラー角速度 $(GM_c/R^3)^{1/2}$ に等しい．

- 円盤密度の鉛直分布は，静水圧方程式 (2.5) を解くことで得ることができる．鉛直方向に等温の場合は

$$\rho(z) = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi}h}\, e^{-z^2/2h^2} \tag{2.7}$$

となる．鉛直方向のスケールハイト h は次式で与えられる．

$$h = \frac{c_s}{\Omega'}. \tag{2.8}$$

このとき音速 c_s は $\gamma = 1$ の等温音速である．ポリトロープの場合は

$$\rho(z) = \rho(0)\left(1 - \frac{(\gamma-1)z^2}{2h^2}\right)^{1/(\gamma-1)} \tag{2.9}$$

となる．この場合も h は (2.8) 式で与えられるが，音速には $z = 0$ での値を用いる．

2.3 線形摂動の WKB 近似解と円盤自己重力不安定性

(a) 摂動量：$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1, \quad P = P_0 + P_1, \quad P_1 = c_s^2\Sigma_1;$
$v_R = v_{R,1}, \quad v_\phi = R\Omega(R) + v_{\phi,1}; \quad \Phi_{\mathrm{D}} = \Phi_{\mathrm{D},0} + \Phi_{\mathrm{D},1}$

非摂動状態としての円盤回転角速度 Ω は，遠心力と重力，圧力の釣り合いより

$$\Omega^2 = \frac{GM_c}{R^3} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{D},0}}{\partial R}(z=0) + \frac{1}{R}\frac{\partial H_0}{\partial R} \tag{2.10}$$

で与えられる．ここで，$H_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}P_0/\Sigma_0$ は非摂動のエンタルピーである．回転角速度 Ω は一般に R に依存する．ケプラー回転では $\Omega \propto R^{-3/2}$，銀河円盤では $\Omega \propto 1/R$ である．Ω が R に依存する回転は差動回転，依存しない回転は剛体回転と呼ばれる．

(b) 摂動に対する WKB 近似 $\quad \dfrac{\partial}{\partial R} \gg \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\phi},\ \dfrac{1}{R}; \quad$ 摂動量 $\propto \exp(ikR + im\phi - i\omega t)$

(c) 摂動に対するポアソン方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\Phi_{\mathrm{D},1} = 4\pi G\Sigma_1\delta(z) \qquad (\because \text{WKB 近似}) \tag{2.11}$$

これをまず，$z \neq 0$ で解く．その場合右辺は 0 であり，無限遠で有限とすると

$$\Phi_{\mathrm{D},1} \propto e^{-k|z|}\exp(ikR + im\phi - i\omega t). \tag{2.12}$$

という z 依存性を持つことがわかる．次に，$z = 0$ を含む微小区間 $-\epsilon \le z \le +\epsilon$ $(\epsilon \ll 1)$ で (2.11) 式を積分すると

$$\left(\frac{\partial\Phi_{\mathrm{D},1}}{\partial z}\right)_{z=+0} - \left(\frac{\partial\Phi_{\mathrm{D},1}}{\partial z}\right)_{z=-0} = 2\pi G\Sigma_1 \tag{2.13}$$

を得る．これに (2.12) を代入して，$z = 0$ において次式を得る．

$$\Phi_{\mathrm{D},1} = -2\pi G\Sigma_1/k. \tag{2.14}$$

(d) その他の摂動方程式と分散関係

- Eq. of continuity

$$i(m\Omega-\omega)\Sigma_1+ik\Sigma_0 v_{R,1}+\frac{im\Sigma_0}{R}v_{\phi,1}=0. \tag{2.15}$$

- Euler's eq.

$$\begin{pmatrix} i(m\Omega-\omega) & -2\Omega \\ -2B & i(m\Omega-\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{R,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix}=(c_s^2\Sigma_1/\Sigma_0+\Phi_{D,1})\begin{pmatrix} -ik \\ -im/R \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

これを解いて，また WKB 近似を用いると

$$\begin{pmatrix} v_{R,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix}=\frac{c_s^2\Sigma_1/\Sigma_0+\Phi_{D,1}}{\Delta}\begin{pmatrix} (m\Omega-\omega)k \\ -i2Bk \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

ここで[2]

$$\begin{cases} B &= -\dfrac{1}{2R}\dfrac{d(R^2\Omega)}{dR} \qquad \text{(Oort's } B \text{ constant)}, \\ \kappa^2 &= -4B\Omega \qquad \text{(epicycle 振動数)}, \\ \Delta &= \kappa^2-(m\Omega-\omega)^2. \end{cases} \tag{2.18}$$

(2.14) と (2.17) 式を (2.15) 式に代入して

$$i(m\Omega-\omega)\left(1+\frac{c_s^2k^2-2\pi G\Sigma_0 k}{\Delta}\right)\Sigma_1=0. \tag{2.19}$$

または，次の分散関係を得る．

$$(m\Omega-\omega)^2=c_s^2k^2-2\pi G\Sigma_0 k+\kappa^2. \tag{2.20}$$

(e) 安定条件

ω が実ならば摂動は安定である．そのためには，すべての k に対し分散関係右辺が正である必要がある．すなわち，「$\kappa^2>0$」と「右辺=0 の判別式が負」の 2 つが安定条件となる．前者は，比角運動量 $R^2\Omega$ が R とともに増大することを要請し，回転流に対する Rayleigh の安定条件と呼ばれるものである．後者からは，Toomre の安定条件

$$Q\equiv\frac{c_s\kappa}{\pi G\Sigma}>1 \tag{2.21}$$

を得る．Q は Toomre's Q value と呼ばれる．また，Q=1 における臨界不安定波長は

$$\lambda_{\rm crit}=2\pi/k_{\rm crit}=2\pi c_s/\kappa.$$

臨界不安定波長が円盤の厚さ c_s/Ω' と同程度であるので，無限に薄いという 2 次元円盤の近似については検討の余地がある．角速度一定の円盤に対し円盤厚みを考慮した 3 次元円盤の自己重力不安定性解析の結果によると，Toomre の安定条件 (2.21) の右辺のしきい値が 30%程度下がると見積もられている (Goldreich & Linden-Bell 1965)．しかしながら，上記の WKB 近似で無視された非軸対称の $m=2$ の摂動が $Q\simeq 2$ でも不安定となり励起されることが分かっている (Vauterin & Dejonghe 1996)．

[2] B はケプラー回転の場合 $-\Omega/4$ に等しく，剛体回転では $-\Omega$ である．剛体回転の場合，(2.16) の ϕ 成分の式の項 $-2Bv_{R,1}$ はコリオリ力の ϕ 成分に等しい．

(f) Rayleigh の安定条件の粒子的描像に基づいた導出

回転流体の Rayleigh の安定条件 $dR^2\Omega/dR > 0$ は，粒子的描像に基づいて理解することができる．中心力場 Φ を運動する単位質量の粒子のエネルギーは $\Omega = \dot{\theta}$ として

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}R^2\Omega^2 + \Phi \tag{2.22}$$

と書ける．この粒子を回転円盤内の１つの流体粒子と考え，Ω を円盤回転角速度とすれば，(2.22) 式の粒子的モデルで回転円盤の力学を近似的に表すことができる．中心力場中の粒子の運動を復習しておこう．粒子が比角運動量 $j_0 = R_0^2\Omega(R_0)$ を持つとすると (2.22) 式は次のように書くことができる．

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + U_{\rm eff}(R). \tag{2.23}$$

ここで有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(R)$ は次式で与えられる．

$$U_{\rm eff}(R) = \Phi(R) + \frac{j_0^2}{2R^2}. \tag{2.24}$$

粒子が $R = R_0$ で円運動をしているとする。このとき中心力と遠心力との釣り合いより

$$-\frac{dU_{\rm eff}}{dR} = -\frac{d\Phi}{dR} + \frac{j_0^2}{R^3} = 0 \qquad (\text{for } R = R_0). \tag{2.25}$$

この粒子を動径方向に微小運動をさせる．動径方向の運動方程式は (2.23) 式を微分し

$$\ddot{R} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dR} = -\left(\frac{d^2U_{\rm eff}}{dR^2}\right)_{R=R_0}(R - R_0) \tag{2.26}$$

となる．２つ目の等号では，$R = R_0$ のまわりでテーラー展開を行い (2.25) 式を用いた．$d^2U_{\rm eff}/dR^2 > 0$ である場合（$U_{\rm eff}$ が下に凸の場合），(2.26) 式の解は $R = R_0$ のまわりの単振動となり，粒子の円運動は動径方向の摂動に対し安定である．逆に $d^2U_{\rm eff}/dR^2$ が負ならば不安定である．この安定条件を回転角速度 Ω で表す．(2.25) 式の中心力と遠心力との釣り合いは各半径で成り立ち $d\Phi/dR = R\Omega^2$ であるので，これを用いて (2.25) 式を微分すると

$$\frac{d^2U_{\rm eff}}{dR^2} = \frac{dR\Omega^2}{dR} + 3\Omega^2 = \frac{2\Omega}{R}\frac{dR^2\Omega}{dR} = \kappa^2 \qquad (\text{for } R = R_0). \tag{2.27}$$

と書くことができる．したがって，条件 $d^2U_{\rm eff}/dR^2 > 0$ はRayleighの安定条件 $dR^2\Omega/dR > 0$ に等しい．また epicycle 振動数 κ は動径方向の振動の角振動数であることもわかる。

2.4 原始惑星系円盤の林モデルとその自己重力安定性

林モデル円盤（最小質量円盤）： 惑星形成における原始惑星系円盤の標準的モデル.

- 円盤温度 (passive disk [円盤内熱源なし] で，光学的に薄いことを仮定)

  ダスト温度は太陽からの輻射加熱と自身の放射冷却との釣合いで決まり，ガス温度もこれに等しい.

$$\pi d^2 L_\odot/(4\pi R^2) = 4\pi d^2\sigma T^4 \tag{2.28}$$

であり，温度と音速は次式で与えられる ($L_\odot = 3.83\times10^{33}$erg/sec)

$$T = 280(R/1\text{AU})^{-1/2}\,\text{K}, \tag{2.29}$$

$$c_s = 1.2(R/1\text{AU})^{-1/4}\,\text{km/sec}. \tag{2.30}$$

ガスの平均分子量を 2.3, 比熱比を 1.4 とした.

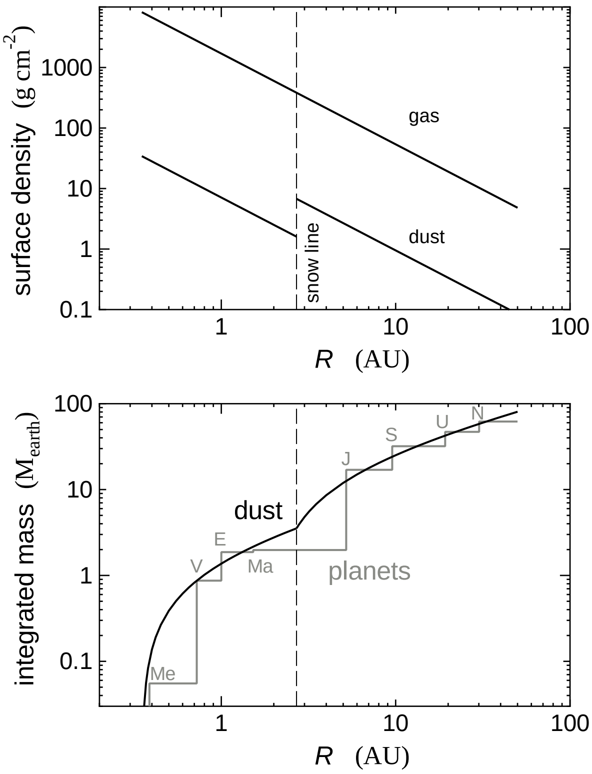

Figure 1: 林モデル円盤のガスとダストの面密度分布 (上) と太陽系惑星の積算質量分布 (灰色線) との比較 (下). 下図で，円盤内縁半径は 0.35AU とし，各巨大惑星の固体質量は $15M_{\oplus}$ とした (Hayashi 1981).

- 円盤面密度 （惑星形成のための必要最小限の質量）

$$\Sigma_{\rm gas} = 1700(R/1{\rm AU})^{-3/2}\ {\rm g/cm^2}, \tag{2.31}$$

$$\Sigma_{\rm dust} = \begin{cases} 7\,(R/1{\rm AU})^{-3/2}\ \ {\rm g/cm^2} & (R < 2.7{\rm AU},\ \text{岩石}), \\ 28\,(R/1{\rm AU})^{-3/2}\ \ {\rm g/cm^2} & (R > 2.7{\rm AU},\ \text{岩石＋氷}). \end{cases} \tag{2.32}$$

- 円盤質量 $M_{\rm disk} = \int_0^{50AU} \Sigma\, 2\pi R dR$

  ガス質量 $\simeq 0.017 M_{\odot}$，ダスト質量 $\simeq 2.3\times 10^{-4} M_{\odot}$（地球質量の約 80 倍）

- Toomre の Q 値

$$Q = 66\,(R/1{\rm AU})^{-1/4} \tag{2.33}$$

  よって，林モデルのガス円盤は自己重力不安定に対しては安定である．一方，より重い円盤で，かつ，円盤外側では，Q 値は小さくなり自己重力不安定になりうる．

- 原始惑星系円盤の鉛直構造

  ガス円盤の厚さはスケールハイト $h = c_s/\Omega$ で与えられる．ここで，c_s は $\gamma = 1$ の等温音速である．円盤のアスペクト比は $h/R \simeq 1/30(R/1AU)^{1/4}$ である．

課題 1:

1.
   - 水素原子 100 コ/cm^3, $T = 10K$ の分子雲に対し Jeans length と Jeans mass を求めよ.
   - 林モデル円盤（分子量 2.3）の温度と音速の表式 (2.30), (2.30) を実際に求めよ．さらに (2.32) 式の面密度も用いて，Toomre の Q 値を求めよ．(原始惑星系円盤では $\kappa = \Omega$.)

2. (2.17) と (2.19) 式を導出せよ.

3. ロッシュ限界（半径）は次式で与えられる.

$$R_{Roche} \simeq 2.4 R_M (\rho_M/\rho_m)^{1/3}. \tag{2.34}$$

   ここで，R_M は主星半径，ρ_M は主星密度，ρ_m は伴星密度である。ロッシュ限界よりも外側で主星を周回する伴星は，潮汐破壊を自己重力で避けることができる。この条件式と Toomre の安定条件が類似していることを示せ．（ヒント：主星の質量は $M = \frac{4\pi}{3}\rho_M R_M^3$ である。また円盤の密度と面密度は $\rho \sim \Sigma/h$ で関係づけられる.）

4. 太陽近傍での銀河円盤の Q 値：銀河中心から 8kpc 離れた太陽近傍における恒星と星間ガスを合わせた密度は 0.1 太陽質量 /pc^3 程度と見積られている．銀河円盤の面密度 Σ はこの密度と厚さ h の積でおおよそ見積ることができる．銀河円盤の回転の速度を 200km/sec とし，$\kappa = \Omega'$ と近似して，太陽近傍での銀河円盤の Q 値を見積れ (太陽質量は 2×10^{30}kg, 1pc = 3×10^{16}m). 見積りの結果は $Q \sim 1$ となる．これは銀河円盤の渦状構造が重力不安定によりつくられているとする説と調和的である.

3　降着円盤の進化と構造

- 降着円盤の進化：乱流粘性による角運動量と質量の輸送 (Lynden-Bell and Pringle 1974)
- 乱流粘性の α モデル

$$\nu_t = \alpha c_s h.$$

$\sqrt{\alpha} c_s$	：最大渦の速度
$\sqrt{\alpha} h$	：最大渦の大きさ
$\alpha \lesssim 0.01$	(Magneto-Rotational Instability 乱流)

3.1　2 次元粘性降着円盤の進化方程式

- 自己重力や外力としての磁場は考えない．乱流粘性の α モデルを採用.
- 分子雲コアからの円盤へのガスの infall は無視．円盤風などによる消失も無視.
- 回転角 ϕ 方向に平均化 (→軸対称円盤).

- Eq. of continuity

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma v_R) = 0. \tag{3.1}$$

(cf. eq. [2.1])

- 中心星重力を考慮した Navier-Stokes eq. は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\, p + \mathbf{grad}\left(\frac{GM_c}{r}\right) + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Pi'}. \tag{3.2}$$

ここで Π' は粘性ストレステンソルで次式で与えられる．

$$\Pi'_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3}$$

これより，軸対称の 2 次元円盤に対する Navier-Stokes eq. の ϕ 成分は

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_R v_\phi}{R} = \frac{1}{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\, R\Pi'_{R\phi}}{\partial R} + \frac{\Pi'_{R\phi}}{R}\right) \tag{3.4}$$

となる．粘性ストレステンソルの R,ϕ 成分 $\Pi'_{R\phi}$ は次式で与えられる．

$$\Pi'_{R\phi} = \Sigma\nu_t\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R}\right) = \Sigma\nu_t R\frac{d\Omega}{dR}. \tag{3.5}$$

(3.1) と (3.4) 式より，$j = Rv_\phi$ を用いると，角運動量保存の式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma j) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma j v_R - R^2\Pi'_{R\phi}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Eqs. (3.5), (3.6) より

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma j) + \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\Bigg(\underbrace{2\pi R\Sigma j v_R}_{\substack{\text{質量輸送に伴う}\\ \text{角運動量流束}}} \quad \underbrace{-2\pi R^3\Sigma\nu_t\frac{d\Omega}{dR}}_{\substack{\text{差動回転円盤における粘性}\\ \text{による角運動量流束}\\ \text{(内側円盤から外側へのトルク)}}}\Bigg) = 0. \tag{3.7}$$

- $\dfrac{\partial j}{\partial t} = 0$, (3.1), (3.7) 式より，$v_R$ と質量降着率 $\dot{\mathcal{M}}$（円盤内側への質量流束) は以下となる．

$$\dot{\mathcal{M}} \equiv -2\pi R\Sigma\, v_R = -\frac{2\pi}{(dj/dR)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\Sigma\,\nu_t\frac{d\Omega}{dR}\right). \tag{3.8}$$

- これを Eq. (3.1) に代入すると，面密度 Σ に対する進化方程式を得る．（拡散方程式の 1 種）

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{(dj/dR)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3\Sigma\nu_t\frac{d\Omega}{dR}\right)\right] = 0. \tag{3.9}$$

3.2　定常解

$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = 0$ となる解を求める．ここでは内側に降着する円盤を考える．Eqs.(3.9), (3.7) より

$$\dot{\mathcal{M}} \;=\; \text{(正の) 定数}, \tag{3.10}$$

$$\dot{\mathcal{J}} \;\equiv\; j\dot{\mathcal{M}} + 2\pi R^3\Sigma\nu_t\frac{d\Omega}{dR} = \text{定数}. \tag{3.11}$$

Eq. (3.11) より

$$\nu_t \Sigma = -\frac{j\dot{\mathcal{M}} - \dot{\mathcal{J}}}{2\pi R^3 (d\Omega/dR)}. \tag{3.12}$$

さらに内側境界条件として $\Sigma(R_{\rm in}) = 0$ を採用すると $\dot{\mathcal{J}} = \dot{\mathcal{M}}\, j(R_{\rm in})\ (>0)$ であるので

$$\nu_t \Sigma = -\frac{\dot{\mathcal{M}}}{2\pi R^3 (d\Omega/dR)} \left[j(R) - j(R_{\rm in}) \right]. \tag{3.13}$$

を得る．特に $\Omega \propto R^{-3/2}$ (Kepler 回転) の場合には

$$\Sigma = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{3\pi\nu_t} \left(1 - \sqrt{\frac{R_{\rm in}}{R}} \right). \tag{3.14}$$

3.3 自己相似解

円盤回転角速度が $\Omega \propto R^{-\beta}$，乱流粘性が $\nu = \nu_0 R^{\gamma}$ とそれぞれ R のべき関数である場合を考える (Kepler 回転円盤では $\beta = 3/2$，林円盤温度で $\alpha =$ 一定の場合 $\gamma = 1$)．このとき，微分方程式 (3.9) は次のような自己相似解をもつ (Lynden-Bell & Pringle 1974; Hartmann et al. 1998; Appendix A も参照)

$$\Sigma(R,t) = \frac{|\dot{M}_{\rm d}|}{2\pi\beta\nu} \exp\left[-\left(\frac{R}{R_d(t)} \right)^{2-\gamma} \right]. \tag{3.15}$$

ここで，円盤半径 $R_d(t)$ は

$$R_d(t) = \left[\frac{\beta(2-\gamma)^2}{2-\beta} \nu_0 t \right]^{\frac{1}{2-\gamma}}. \tag{3.16}$$

で定義される．この自己相似解では円盤内縁半径に対し $R_{in} \ll R, R_d$ が仮定されており，円盤内縁で $\dot{\mathcal{J}} \to 0$ となるため，円盤の全角運動量 $J_{\rm d}$ は保存する．$R_{\rm in} \ll R \ll R_{\rm d}$ という半径 R では，自己相似解 (3.15) と 定常降着円盤の解 (3.13) は一致する．さらに, 円盤質量 $M_d(t)$ とその時間微分は，円盤角運動量 $J_{\rm d}$ を用いて次式で与えられる．

$$M_{\rm d} = \frac{J_{\rm d}}{\Gamma(b) R_{\rm d}^2 \Omega(R_{\rm d})} \quad \propto t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}, \qquad \dot{M}_{\rm d} = -\frac{2-\beta}{2-\gamma}\frac{M_{\rm d}}{t} \qquad \left(b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1 \right). \tag{3.17}$$

ここで, $\Gamma(b)$ はガンマ関数である．また, 質量降着率 (円盤内側への質量流束) $\dot{\mathcal{M}}$ は

$$\dot{\mathcal{M}} = -2\pi R \Sigma v_R = 2\pi\beta\nu\Sigma \left[1 - \frac{2-\gamma}{2-\beta} \left(\frac{R}{R_d} \right)^{2-\gamma} \right]. \tag{3.18}$$

ガス円盤の進化時間は、林モデルの円盤温度を仮定すると

$$t_{\rm d} \simeq \frac{R_d^2}{3\nu_t(R_d)} \simeq \frac{1}{3\alpha\Omega(R_d)} \left(\frac{R_d}{h} \right)^2 = 5 \times 10^6 \left(\frac{\alpha}{10^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{h/R_d}{0.1} \right)^{-2} \left(\frac{R_d}{100{\rm AU}} \right)^{3/2} {\rm yr}. \tag{3.19}$$

と見積もられる．$\alpha = 10^{-3}$ の場合の進化時間 5 百万年は原始惑星系円盤の寿命と合う．

3.4 粘性降着円盤自己相似解の導出

(1) 次元解析による円盤各量の見積りと自己相似解

- 仮定

$$\nu(R) = \nu_0 R^{\gamma}, \qquad \Omega(R) = \Omega_0 R^{-\beta} \qquad (\text{ケプラー回転円盤では}\ \beta = 3/2). \tag{3.20}$$

- 円盤の特徴的な半径 R_c (円盤質量の大部分を担う領域）は，$R_c \sim [\nu(R_c)t]^{1/2}$ より

$$R_c \sim (\nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}}. \tag{3.21}$$

- 特徴的な円盤降着速度 $$v_{R,c} \sim R_c/t \sim \nu(R_c)/R_c. \tag{3.22}$$

- 円盤全角運動量の保存 $$J_d = \int_0^\infty j\Sigma 2\pi R dR = \mathrm{const.} \tag{3.23}$$

- 円盤全質量 $$M_d = \int_0^\infty \Sigma 2\pi R dR \ \sim \ \frac{J_d}{j_c} \ \sim \ \frac{J_d}{R_c^2 \Omega(R_c)} \ \propto \ t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}. \tag{3.24}$$

- 円盤面密度 $$\Sigma_c = \Sigma(R_c(t), t) \sim \frac{J_d}{j_c R_c^2} \sim \frac{J_d}{R_c^4 \Omega(R_c)} \ \propto \ t^{-\frac{4-\beta}{2-\gamma}}. \tag{3.25}$$

- 無次元変数 $$y = \frac{R^2}{\nu t} = \frac{R^{2-\gamma}}{\nu_0 t}. \tag{3.26}$$

- 円盤面密度分布の自己相似解

  上の見積りは，円盤面密度などの空間分布が任意の時間において相似的であるような解 (自己相似解) が存在することを示している．自己相似解はただ 1 つの無次元変数 y の関数で表される．面密度の自己相似解を次の形に表す.

$$\Sigma(r, t) = \frac{J_d}{R^4 \Omega} f(y). \tag{3.27}$$

(2) 角運動量保存による自己相似解の積分

角運動量分布の積分形 (積算分布)

$$J(R) = \int_0^R j\Sigma 2\pi R dR. \tag{3.28}$$

R と y の関係式

$$R(y) = (y\nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}} \tag{3.29}$$

を用いて，積算分布を y の関数 $J(R(y))$ とすると，これは自己相似性より時間に依らない.

$$\frac{d}{dt} J(R(y)) = 0. \tag{3.30}$$

一方，実際に左辺を $y=$ 一定での時間微分であることに気をつけて書き下すと

$$\frac{d}{dt} J(R(y)) = \int_0^{R(y)} \frac{\partial(j\Sigma)}{\partial t} 2\pi R dR + j\Sigma 2\pi R \frac{dR(y)}{dt}. \tag{3.31}$$

となる．右辺第 1 項は角運動量保存の式 (3.7) を用いて容易に積分でき

$$\dot{\mathcal{J}} + j\,\Sigma\, 2\pi r \frac{dR(y)}{dt} = 0 \tag{3.32}$$

を得る．これより $\dot{\mathcal{J}} < 0$ であり，自己相似解の円盤では角運動量流束は正である．結局円盤降着率 $\dot{\mathcal{M}}$ と速度 v_R の表式を得る.

$$\dot{M}_d(R) \equiv -2\pi R \Sigma v_R = 2\pi\beta\nu\Sigma \left[1 - \frac{y}{\beta(2-\gamma)}\right]. \tag{3.33}$$

これは，(3.16)，(3.29) 式より (3.18) 式に等しいと分かる．

(3) 関数 f の方程式とその解

円盤質量降着率は (3.8) 式右辺のようにも書ける．(3.8) と (3.33) 式が等しいことから，$f(y)$ の方程式

$$\frac{d\ln f}{dy} = -\frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} + \frac{b}{y} \qquad \left(b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1\right). \tag{3.34}$$

を得る．この微分方程式の解は，新たな無次元変数

$$x = \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} y = \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} \frac{R^2}{\nu t} = \left(\frac{R}{R_{\rm d}(t)}\right)^{2-\gamma} \tag{3.35}$$

($R_{\rm d}$ は [3.16] 式で定義されている) を用いて次のように書ける．

$$f = \frac{2-\gamma}{2\pi\Gamma(b)} x^b \exp(-x). \tag{3.36}$$

右辺の比例定数は円盤全角運動量の式 (3.23) を満たすように決めた．よって円盤の面密度と全質量，および両者の関係は次のようになる．

$$\Sigma(R,t) = \frac{(2-\gamma)L}{2\pi\Gamma(b)\Omega R^4} x^b \exp(-x), \tag{3.37}$$

$$M_d(t) = \int_0^\infty \Sigma 2\pi R dR = \frac{J_{\rm d}}{\Gamma(b)\Omega(R_{\rm d})R_{\rm d}^2}, \qquad \Sigma(r,t) = \frac{|\dot{M}_{\rm d}|}{2\pi\beta\nu} \exp(-x). \tag{3.38}$$

課題 2： $\dfrac{dR(y)}{dt} = \dfrac{\nu y}{(2-\gamma)R}$ を示し，(3.33)，(3.34)，(3.36)，(3.38) 式を導出せよ．

(**余談**) 粘性が $\nu = \nu(R,\Sigma) = \nu_0 R^\gamma \Sigma^\delta$ と面密度にも依存する降着円盤に対しても，自己相似解が得られている (Pringle 1974, 1991, MNRAS; Cannizzo et al. 1990, ApJ)．その解を上と同様な方法で求めてみよう．ここでは $\Omega = \sqrt{GM_*/R^3}$ であるケプラー回転円盤を考える．

特徴的な円盤半径 R_c を用い，特徴的な面密度 Σ_c は $\Sigma_c = J_d/[R_c^4\Omega(R_c)]$ と与えられる．また $t = R_c^2/\nu(R_c,\Sigma_c)$ が成り立つとすると，$R_c(t) = [(J_d/\sqrt{GM_*})^\delta \nu_0 t]^{1/a}$ となる (cf. [3.21] 式)．但し，$a = 2-\gamma+\frac{5}{2}\delta$ である．

無次元座標 y を $\Sigma_R \equiv J_d/[R^4\Omega(r)]$ を用いて $y \equiv R^2/[t\nu(R,\Sigma_R)] = [R/R_c(t)]^a$ と定義する (cf. [3.26] 式)．R について解くと $R(y) = R_c(t)y^{1/a}$ を得る．このとき，自己相似性より $\frac{d}{dt}J(R(y)) = 0$ と (3.32) 式が成り立つので，$dR(y)/dt$ と円盤降着率に対し次式を得る．

$$\frac{dR(y)}{dt} = \frac{\nu(R,\Sigma_R)y}{aR}, \qquad \dot{\mathcal{M}} = 3\pi\nu\Sigma\left[1 - \frac{2y}{3a}\left(\frac{\Sigma}{\Sigma_R}\right)^{-\delta}\right]. \tag{3.39}$$

自己相似解を $\Sigma = \Sigma_R f(y)$ と書き，(3.39) と (3.8) 式が等しいことから，f の微分方程式

$$\frac{df^\delta}{dy} - A\frac{f^\delta}{y} + B = 0, \qquad \left(A = \frac{1+\frac{1}{2a}}{1+\frac{1}{\delta}}, \quad B = \frac{1}{3a^2(1+\frac{1}{\delta})}\right) \tag{3.40}$$

を得る．この微分方程式を解いて, (3.23) 式を満たす自己相似解が以下のように求まる．

$$\Sigma = C\,\frac{J_d}{R^4\Omega}(x^A - x)^{1/\delta}, \quad x = \frac{B\,y}{(1-A)C^\delta}, \quad C = \left[\frac{2\pi}{a}\int_0^1 (x^A - x)^{1/\delta}\,\frac{dx}{x}\right]^{-1}. \tag{3.41}$$

3.5 粘性加熱で決まる円盤温度

- 粘性加熱率 ϵ（単位質量当たり）(e.g. ランダウリフシッツ「流体力学」)

$$\epsilon = \Pi'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nu_t \left(R\frac{d\Omega}{dR}\right)^2. \tag{3.42}$$

- 表面温度

$$2\sigma T_s^4 = \Sigma\nu_t \left(R\frac{d\Omega}{dR}\right)^2. \tag{3.43}$$

$R_{in} \ll R \ll R_d$ で，定常降着円盤を仮定すると

$$T_s = \left(-\frac{\dot{\mathcal{M}}}{8\pi\sigma}R\frac{d\Omega^2}{dR}\right)^{1/4} \quad \propto\ \Omega^{1/2}\ \propto\ R^{-3/4} \quad (\text{ケプラー回転円盤}). \tag{3.44}$$

林モデルのガス面密度で $\alpha = 10^{-3}$ とすると，1AU で $T_s \simeq 100\mathrm{K}$ となる．

- 円盤内部の鉛直温度分布：

z 方向の温度構造を求める．熱輸送は輻射によるものとし, 拡散近似が適用できるものとする．また, 乱流粘性による加熱源は円盤中心面に局在していると簡単化すると

$$\frac{d}{dz}\left(-\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dz}\right) = \frac{1}{2}\nu_t\Sigma\left(R\frac{d\Omega}{dR}\right)^2\delta(z). \tag{3.45}$$

さらに, 光学的厚さ $\tau_z = \int_z^\infty \kappa\rho dz$ を導入すると, Eq. (3.45) は

$$\frac{4}{3}\frac{d}{d\tau_z}(\sigma T^4) = -\frac{R\Omega}{4\pi}\frac{d\Omega}{dR}\dot{\mathcal{M}}. \tag{3.46}$$

境界条件として，$\tau_z = 2/3$ で $T = T_s$ とすると，温度分布は次式のように得られる．

$$T(z) = \left(\frac{3}{4}\tau_z + \frac{1}{2}\right)^{1/4} T_s. \tag{3.47}$$

最後に，降着円盤のエネルギー収支を表す式も求めておく．(3.4) 式と速度 $\boldsymbol{v}$ との内積をとると

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad})\right]\left(\frac{v^2}{2}\right) = &\ -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,p - \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\left(-\frac{GM_*}{r}\right) \\ &+\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Pi'}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\Pi'_{ik}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

となる．通常の降着円盤では，$v_R \ll v_\phi$ であるので，v^2 は v_ϕ^2 に等しいとすることができる．また圧力勾配の項は左辺に比べ無視できる $(p/\rho \sim c_s^2 \ll v_\phi^2)$．よって，2 次元軸対称の定常降着円盤に対し，(3.48) 式は次のように変形できる．

$$-\dot{\mathcal{M}}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R^2\Omega^2}{2}\right) = \dot{\mathcal{M}}\frac{\partial}{\partial R}\left(-\frac{GM_*}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial R}\left(3\pi\Sigma\nu R^2\Omega^2\right) - 2\pi R\Sigma\,\frac{9}{4}\nu\Omega^2. \tag{3.49}$$

これより，定常降着円盤の各半径における力学的エネルギーの収支を議論することができる．

課題 3: 質量 M_* の中心星のまわりを Kepler 回転する定常降着円盤全体の粘性加熱率は，重力エネルギーの解放によりまかなわれているので，$1/2(GM_*/R_{\rm in})\dot{\mathcal{M}}$ で与えられると予想される．この予想が成り立つことを確かめよ．円盤内縁 $R_{\rm in}$ は円盤半径 R_d より十分小さいとする．

課題 4: まず (3.49) 式を導出し，この式の 4 つの項の次元と物理的意味をそれぞれ説明せよ．さらに，各項の間の比を求め，定常降着円盤の各半径における力学的エネルギーの収支を説明せよ．

3.6　円盤の散逸

- 円盤散逸に対する観測的要請
  - 円盤寿命 $\sim 10^6$-10^7yr.
  - 散逸途中の円盤 (transition disk) が比較的少ないことから，散逸は短期間 ($\sim 10^5$yr.)

  粘性進化以外の散逸機構が必要 $\longrightarrow$ “ 光蒸発 (photoevaporation) ”が有望

- 光蒸発による円盤散逸
  - 中心星等の FUV や EUV, X 線による円盤表面の加熱 ($\sim$1 万度) で流体力学的に散逸
  - 光蒸発の臨界半径 r_g の付近で起こる:

$$r_g = \frac{GM_*}{c_s^2} = 9\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\left(\frac{c_s}{10\mathrm{km/s}}\right)^{-2} \mathrm{AU}. \tag{3.50}$$

  - 光蒸発による円盤消失率は $\dot{M}_d = 10^{-9}$-$10^{-7} M_\odot/\mathrm{yr}$. (FUV, EUV, X 線の強度に依存)

4　ダストの運動と成長

- ダストの初期状態は星間ダスト．サイズは 5nm-0.2μmに分布するが大部分の質量はサイズ分布上限が担う (Mathis et al. 1977)．初期ダストはシリケイトコアと氷マントルを持つ．それらが衝突・付着により成長.
- 原始惑星系円盤の乱流が弱まるとダストが沈殿し円盤中心面にダスト層を形成
  $\rightarrow$ 重力不安定により微惑星形成 (Goldreich and Ward 1973).
- ダストが小さいと（ガス抵抗により）沈殿しない $\rightarrow$ ダストの成長が重要.

4.1　ダストの運動

(a) ガス抵抗則

- ガス抵抗力と停止時間

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{drag}} = -mA(m)\rho_{\mathrm{g}}\Delta\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

$$t_{\mathrm{stop}} = \frac{m\Delta v}{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{drag}}|} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}A}, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{drag}} = -\frac{m\Delta\boldsymbol{v}}{t_{\mathrm{stop}}}. \tag{4.2}$$

  ガス抵抗力の係数 A はダストサイズにより次の 2 通りの表式で与えられる.

  - Stokes' law　($a > 9l/4$,　$l(=1/[n_{H_2}\sigma_{H_2}])$: gas mean free path)

$$A = \frac{9v_{\mathrm{th}}l}{4\rho_{\mathrm{solid}}a^2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{9c_{\mathrm{s}}l}{4\rho_{\mathrm{solid}}a^2}. \tag{4.3}$$

$$\left(v_{\mathrm{th}} = \sqrt{8/\pi}c_s, \qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{drag}} = -6\pi\nu a\rho_{\mathrm{g}}\Delta\boldsymbol{v}, \qquad \nu = v_{\mathrm{th}}l/2.\right)$$

– Epstein's law $(a < 9l/4)$

$$A = \frac{v_{\rm th}}{\rho_{\rm solid} a} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{c_{\rm s}}{\rho_{\rm solid} a}. \tag{4.4}$$

– また一般に

$$A = \frac{3\,C_D \Delta v}{8\rho_{\rm solid} a} \qquad (\text{高レイノルズ数または超音速では}\ C_D \sim 1) \tag{4.5}$$

(b) ガスとダストの運動方程式（定常，軸対称，自己重力無しを仮定）

- ガス　$\boldsymbol{v} = (v_R, v_\phi = R\Omega + v_{\phi,1}, v_z)$．($\Omega = \Omega_{\rm K} \equiv \sqrt{GM_{\rm c}/R^3}$ とする．$B = -\Omega/4$.)
  (2.16) 式を参考にして

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ -2B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_R \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho_{\rm g}} \dfrac{\partial p}{\partial R} \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_{\rm d} A \begin{pmatrix} V_R - v_R \\ V_{\phi,1} - v_{\phi,1} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

- ダスト　$\boldsymbol{V} = (V_R, V_\phi = R\Omega + V_{\phi,1}, V_z)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ -2B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ V_{\phi,1} \end{pmatrix} = \qquad\qquad - \rho_{\rm g} A \begin{pmatrix} V_R - v_R \\ V_{\phi,1} - v_{\phi,1} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

(c) ガスに比べてダストの密度が小さい場合の解

- ガス

$$v_R = v_z = 0, \qquad v_\phi = (1-\eta) R\Omega, \tag{4.8}$$

$$\eta = -\frac{1}{2R\Omega^2 \rho_{\rm g}} \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{2} \left(\frac{c_{\rm s}}{R\Omega}\right)^2 \frac{\partial \ln p}{\partial \ln R}. \tag{4.9}$$

- ダスト

$$V_R = -\frac{2t_{\rm stop}\Omega}{1 + (t_{\rm stop}\Omega)^2}\, \eta R\Omega, \tag{4.10}$$

$$V_\phi - v_\phi = \frac{(t_{\rm stop}\Omega)^2}{1 + (t_{\rm stop}\Omega)^2}\, \eta R\Omega, \tag{4.11}$$

$$V_z = -\,\Omega z\, t_{\rm stop}\Omega, \qquad (\text{for}\ \ t_{\rm stop}\Omega \ll 1). \tag{4.12}$$

(d) ガスとダストの密度比 $\epsilon = \rho_{\rm d}/\rho_{\rm g}$ が任意の場合 (Nakagawa et al. 1986)

$$\begin{pmatrix} v_R \\ v_{\phi,1} + \eta R\Omega \end{pmatrix} = \frac{\eta R\Omega}{(1+\epsilon)^2 + (t_{\rm stop}\Omega)^2} \begin{pmatrix} 2\,\epsilon\, t_{\rm stop}\Omega \\ \epsilon(1+\epsilon) \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

$$\begin{pmatrix} V_R \\ V_\phi \, - \, v_\phi \end{pmatrix} = \frac{\eta R\Omega}{(1+\epsilon)^2 + (t_{\rm stop}\Omega)^2} \begin{pmatrix} -2\, t_{\rm stop}\Omega \\ (t_{\rm stop}\Omega)^2 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

4.2 ダスト成長と沈殿

(a) ダスト成長率

$$\frac{dm}{dt} = \rho_\mathrm{d}\,\sigma_\mathrm{col}\,v. \tag{4.15}$$

ここで，断面積 σ_col は $4\pi a^2$, v は衝突相対速度でその大きさは沈殿速度 V_z 程度である．
ダストの成長時間は

$$t_\mathrm{grow} = a/\frac{da}{dt} = 3m/\frac{dm}{dt} = \frac{3m\rho_\mathrm{g}A}{4\pi a^2\rho_\mathrm{d}z\Omega^2} \sim \frac{\Sigma_\mathrm{g}}{\Sigma_\mathrm{d}}\,\Omega^{-1}. \tag{4.16}$$

ここで，Epstein 則 (4.4) を仮定し，z はダスト層の厚さとした．この成長時間はダストサイズやダスト内部密度 ρ_solid に依存しない．また，ダスト成長時間は円盤外側 (∼100AU) でも数万年程度であり，ガス円盤進化時間に比べ短時間でダスト成長が進行することがわかる．

(b) ダストの沈殿

ダストの成長とともに沈殿速度は増加する．$t_\mathrm{grow} \sim h/|V_z(h)|$ となると沈殿が進行．円盤中心面にダスト層が形成されるまでに，$\sim 10\,t_\mathrm{grow}$ 程度かかる．

(c) 乱流円盤におけるダスト層の厚さ

乱流円盤においてダスト層の厚さ h_d は，巻き上げ時間と沈殿時間のつり合いで決まる

$$\frac{h_d^2}{\nu_t} \sim \frac{h_d}{|V_z(h_d)|}. \tag{4.17}$$

これより $\nu_t = \alpha c_s h$ として

$$h_d = \sqrt{\frac{\alpha}{t_\mathrm{stop}\Omega}}\,h. \tag{4.18}$$

乱流円盤においても，ダスト成長時間は (4.16) 式で与えられる．(乱流により加速されたダスト速度は沈殿速度と同程度であるため)

(d) ダストの中心星への落下

- ダストの成長とともにダスト落下速度 V_R は加速．(4.10) 式で $t_\mathrm{stop}\Omega_\mathrm{K} \simeq 1$ とすると

$$|V_R| \simeq \eta R\Omega \simeq 50\mathrm{m/sec}. \tag{4.19}$$

- 落下時間 ($t_\mathrm{stop}\Omega_\mathrm{K} \simeq 1$ の場合)

$$t_\mathrm{drift} = \frac{R}{|V_R|} \simeq \frac{1}{\eta\Omega} \simeq 100\,年 \qquad (\mathrm{at\ 1AU}). \tag{4.20}$$

課題 5:

1. Epstein's law ([4.4] 式) の場合，抵抗力はおおよそ $F_\mathrm{drag} \sim \pi a^2\rho_g c_s \Delta v$ で与えられる．これをオーダー見積りにより導出せよ．

2. ガスとダストの速度の式 (4.8)-(4.11) 式を導出せよ．

Table 1: ダスト付着に関する物性量

	表面エネルギー γ [J/m^2]	ヤング率 $\mathcal{E}$ [GPa]
シリケイト (SiO_2)	0.03（実効的な値）	50
氷	0.1	7

4.3 ダスト付着の力学

- 付着力は分子間力に起因： ファンデルワールス力（<0.01eV, 岩石), 水素結合（$\sim$ 0.1eV, 氷)
- 付着のエネルギーは，巨視的な量である表面エネルギー γ [J/m^2] で表される．

$$E_{\rm stick} = -2\gamma\pi a^2 \qquad (a \text{ は接触面半径}). \tag{4.21}$$

- 接触面半径

  半径 R の固体球 2 体の接触において，接触面 (円) の半径 a は次式で与えられる（JKR 理論）

$$a \simeq \left(\frac{14\gamma R^2}{\mathcal{E}}\right)^{1/3}. \tag{4.22}$$

  ここで，$\mathcal{E}$ はヤング率 [Pa = N/m^2] で固体の剛性を示す量である．上式の大まかな導出を示しておこう．弾性エネルギーは固体内部の変位 u を用いて

$$E_{\rm elastic} \simeq \int (\text{応力}) \times \frac{du}{dx} dV \simeq \int \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dV \ \simeq 0.2\,\mathcal{E}a^5/R^2. \tag{4.23}$$

  と与えられる．上式の最後の等号は，球表面の変位 δ を用いて $du/dx \sim \delta/a$ と見積もり，また幾何学的関係 $\delta \sim a^2/R$ を用いれば，近似的に導くことができる．全エネルギー $E_{\rm stick}+E_{\rm elastic}$ を最小にするように半径 a が決まり，その結果 (4.22) 式を得る．

- 付着による結合エネルギーは，(4.22) 式の接触面半径を用いて次のように求まる．

$$E_{\rm bond} = |E_{\rm stick} + E_{\rm elastic}| \simeq 20\left(\frac{\gamma^5 R^4}{\mathcal{E}^2}\right)^{1/3}. \tag{4.24}$$

- 付着のための限界速度

  固体球粒子の質量を m とすると，付着限界速度 $v_{\rm crit}$ は

$$v_{\rm crit} \sim \left(\frac{E_{\rm bond}}{m}\right)^{1/2} \sim \begin{cases} 3(R/0.1\mu{\rm m})^{-5/6} & {\rm m/sec} \quad (\text{氷}), \\ 0.3(R/0.1\mu{\rm m})^{-5/6} & {\rm m/sec} \quad (\text{岩石}). \end{cases} \tag{4.25}$$

  (4.25) 式はエネルギーによる大雑把な見積りである．数値計算や室内実験による微粒子集合体衝突の研究によると，付着限界速度は上の見積りより 1 桁位大きい．

5　微惑星形成

5.1　初期微惑星質量の古典的な見積り

- ダスト層自己重力不安定による微惑星形成 (Goldreich and Ward 1973)

  ダスト層の密度 $\Sigma_\mathrm{d}/h_\mathrm{d} \simeq$ ロッシュ密度 ($\sim \Omega^2/G$　[2.34 式]) を越えると，自己重力不安定により分裂し微惑星が形成される．

- 分裂条件を Toomre の Q 値で表す。音速（速度分散）c_s を $h_\mathrm{d}\Omega$ で置き換えると分裂条件は

$$Q \sim \frac{h_\mathrm{d}\Omega^2}{\pi G \Sigma_\mathrm{d}} \lesssim 1. \tag{5.1}$$

- ダスト層の臨界厚さは $Q \sim 1$ で与えられる：

$$h_\mathrm{d,crit} \sim \frac{\pi G \Sigma_\mathrm{d}}{\Omega^2} = \frac{\pi \Sigma_\mathrm{d} R^3}{M_c}. \tag{5.2}$$

  林モデル円盤 1AU で $h_\mathrm{d,crit}/R \sim 2 \times 10^{-6}$. 巻き上げに必要な速度 $h_\mathrm{d,crit}\Omega \sim 7\mathrm{cm/s}$ と極めて小さい.

- 臨界波数と初期微惑星質量

$$k_\mathrm{crit} \sim 1/h_\mathrm{d,crit}. \tag{5.3}$$

$$m_\mathrm{crit} \sim \pi(2\pi/k_\mathrm{crit})^2\Sigma_\mathrm{d} \sim 4\pi^5\frac{R^6\Sigma_\mathrm{d}^3}{M_c^2}. \tag{5.4}$$

  林モデルガス円盤 1AU では，$m_\mathrm{crit} \sim 10^{18}\mathrm{g}$ と見積もられる．

5.2　微惑星形成の問題点

(a) シア不安定によるダストの巻き上げ

- ダスト層が高密度 ($\rho_\mathrm{d} \gtrsim \rho_\mathrm{g}$) になると，上層のガスとの間に回転速度の差が生まれる

$$\Delta v_\phi \sim \eta R\Omega. \tag{5.5}$$

  このためシア不安定による乱流が発生し，ダストを巻き上げる (Weidenschilling 1980).

- 巻き上げの高さは重力エネルギーと運動エネルギーのつり合いから見積もられる.

$$\frac{1}{2}\frac{GM_c}{R^3}z^2 \sim \frac{1}{2}(\eta R\Omega)^2. \tag{5.6}$$

$$z \sim \frac{c^2}{R\Omega^2} \sim \frac{h^2}{R}. \tag{5.7}$$

- 巻き上げ可能なダスト量

  巻き上げられるダストの密度は最大で $\rho_d \sim \rho_g$ まで大きくなる.
  よって，巻き上げ可能なダスト面密度の最大値 $\Sigma_\mathrm{d,max}$ は

$$\Sigma_\mathrm{d,max} \sim 2z\rho_g \sim \frac{h}{R}\Sigma_g. \tag{5.8}$$

$z/h \simeq 1/30$ であるので，$\Sigma_{\rm d,max}$ は実際のダスト面密度 Σ_d ($\simeq \Sigma_g/100$) よりも大きい．さらに，Sekiya (1998) による詳細な見積りでは，巻き上げの最大ダスト量は上記の見積りより 3 倍程度も大きい．よって，宇宙存在比のダスト量をもつ原始惑星系円盤では，ダストはすべて巻き上げられてしまい，沈殿を必要とする自己重力不安定による微惑星形成は難しい．

- 解決方法
  - より大きなダスト面密度の実現の可能性
    円盤全体でガスダスト存在比を変えるのは難しいが[3]，局在化させダスト面密度を局所的に増大させることは可能. 例えば，ダスト落下が途中で減速すれば，ダストが溜まりダスト存在量は上がる．内側ほど円盤ガス密度は高く $t_{\rm stop}\Omega$ が小さくなるため，**ダストの落下速度減少と滞留**を実現できるかもしれない (Youdin and Shu 2002) が，ダストがさらに成長してしまうと落下速度は増加し滞留できない．
    別の機構として，ガス乱流の中でダストが吹きだまりに局在化することでダスト面密度が増大する可能性も検討されており，**streaming instability** はそのような機構の 1 つである．この streaming instability を起こすためにも $\Sigma_d \gtrsim \Sigma_{\rm d,max}$ が必要．またダスト・ガスの混合流体における**永年重力不安定性**にてダストを濃集させ面密度を増大させる機構も提唱されている (Ward 2000, Youdin 2011)．しかし，この不安定を起こすためには乱流が非常に弱い必要がある ($\alpha < 10^{-4}$).
  - 大きいダスト粒子への成長とガスからの decouple（分離）の実現
    ダスト局在化のためにもある程度の decouple は必要（streaming instability は $t_{\rm stop}\Omega \sim 0.1$ で起こりやすい.)．decouple するまでダストが成長できるかが問題.

(b) ダストの中心星落下の問題

$t_{\rm stop}\Omega \simeq 1$ の場合，落下速度 $\simeq$ 50m/sec で落下時間は 100 年 (at 1AU) と短い．但し，これは成長時間 (4.16) と同程度であり，成長でガスと decouple し落下が減速すれば問題でない．また逆に，$\sim 100\mu m$ の小さいサイズでダスト成長が停止すれば，落下速度が遅く落下時間は円盤寿命程度となる．$100\mu m$ 程度のダストサイズは ALMA による円盤偏光観測の結果と調和的である．

(c) ダストの衝突破壊

(最大) 衝突速度は $\eta R\Omega \simeq$ 50m/sec (時速 180km)．このような高速衝突で合体成長は可能であるか？

[3]円盤内のダストは中心星へ落下するので，ダストの存在量を円盤全体で減少させることは容易である．

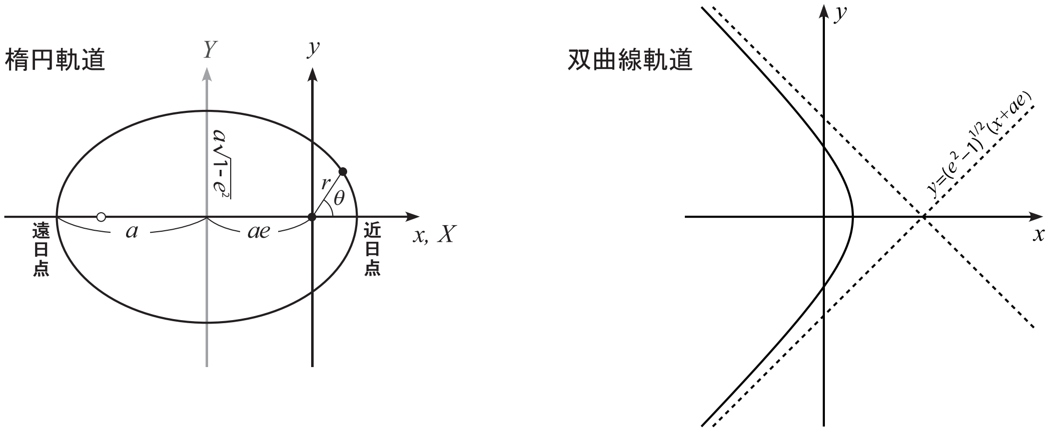

Figure 2: 楕円軌道と双曲線軌道.

6　重力多体系としての微惑星円盤の運動学

6.1　重力 2 体問題（力学の復習）

2 粒子（質量 M，m）の重力相互作用による相対運動を考える（換算質量 $\mu\,(=\dfrac{Mm}{M+m})$ の運動).

- 運動方程式

$$r\text{ 成分：}\qquad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{6.1}$$

$$\theta\text{成分：}\qquad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0, \tag{6.2}$$

$$\text{但し，}\qquad \alpha = \frac{GMm}{\mu} = G(M+m). \tag{6.3}$$

- 運動の定数

・角運動量（単位質量当たり）
$$L = r^2\dot{\theta}. \tag{6.4}$$

・エネルギー（単位質量当たり）
$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{6.5}$$

- 楕円軌道（$E < 0$, $e < 1$）

・直交座標表示
$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1. \tag{6.6}$$

・極座標表示 ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{6.7}$$

・軌道長半径 a，離心率 e と E，L との関係は，(6.5) 式において近点・遠点で $\dot{r} = 0$ より

$$a = -\frac{\alpha}{2E}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2}}. \tag{6.8}$$

- 双曲線軌道（$E > 0,\ e > 1$）

  ・(6.6)-(6.8) 式はそのまま使える.（$a < 0$, $e > 1$ に注意.）

  ・無限遠からの入射速度 v_0，衝突パラメータ b と各定数との関係

$$E = \frac{1}{2}v_0^2, \quad L = bv_0 \ \text{より}, \qquad |a| = \frac{G(M+m)}{v_0^2}, \quad e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \qquad (b = |a|\sqrt{e^2-1}). \tag{6.9}$$

  ・散乱角

$$\varphi = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = 2\sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left[bv_0^2/G(M+m)\right]^2}}\right\}. \tag{6.10}$$

  小角度散乱では $\qquad \varphi \simeq \dfrac{2G(M+m)}{bv_0^2}.$

6.2 重力多体系における緩和

6.2.1 緩和過程の概要

(a) 初期緩和：ビリアル平衡の成立
運動エネルギーと重力ポテンシャルとがおよそ釣り合い，重力収縮が停止.
しかし，局所熱平衡（速度分布関数の緩和）には至らない.
例：円盤系（銀河，微惑星円盤），楕円銀河，球状星団

(b) 円盤系，球状星団におけるビリアル平衡後の緩和過程（2 体重力緩和）

- 気体分子運動論と同様に速度分布関数が緩和．同時に平均速度や空間分布が進化.
- 回転運動＋ランダム運動 (離心率，傾斜角）
  円盤系ではランダム運動は弱く (粒子間相対速度は遅く)，緩和過程が速い.
- 空間分布は軸対称，または球対称で，その動径方向分布が進化.

6.2.2 2 体重力緩和による力学的摩擦 (dynamical friction)

力学的摩擦 (dynamical friction) とは

- 天体群の中を運動する１つの天体に働く重力的な「ガス抵抗」
- ２つの天体群の間でエネルギー等分配 ($m\langle V_m^2\rangle = M\langle V_M^2\rangle$) へ緩和する効果

以下では主に前者について考える.

(a) 静止した天体群中を，1 つの天体 (質量 M) が運動する場合

- 設定
  – 質量 M の天体の速度: V_M
  – 天体群の天体１つの質量: m，天体群の数密度: n

- 1 回の 2 体重力散乱による速度変化

  相対速度は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_m - \boldsymbol{V}_M$. 今の場合は，入射相対速度は $\boldsymbol{v}_0 = -\boldsymbol{V}_M$.
  相対速度の変化は，衝突パラメータ b の次のような関数となる．

$$\Delta v_{\parallel} \equiv \Delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_0/|\boldsymbol{v}_0| = v_0(\cos\varphi - 1) = -2v_0 \sin^2\frac{\varphi}{2}$$
$$= -\frac{2v_0}{1 + \left[bv_0^2/G(M+m)\right]^2}. \tag{6.11}$$

$$|\Delta \boldsymbol{v}_{\perp}| = \frac{2v_0\left[bv_0^2/G(M+m)\right]}{1 + \left[bv_0^2/G(M+m)\right]^2}. \tag{6.12}$$

  天体 M の速度変化は

$$\Delta V_{M\parallel} = -\frac{m}{M+m}\Delta v_{\parallel}. \tag{6.13}$$

  (6.11) と (6.12) 式の結果は，次のように近似的に見積ることもできる (impulse 近似).
  重力相互作用が弱くほぼ直線の軌道で通り過ぎる天体 m の速度変化は，$M \gg m$ の場合

$$\Delta \boldsymbol{v}_{\perp} \sim \frac{F_{max}}{m}\Delta t \sim \frac{GM}{b^2}\frac{2b}{v_0} = \frac{2GM}{bv_0}, \tag{6.14}$$

$$\Delta v_{\parallel} = v_0(\cos\varphi - 1) = -v_0\frac{1}{2}\varphi^2 \simeq -\frac{v_0}{2}\left(\frac{\Delta \boldsymbol{v}_{\perp}}{v_0}\right)^2 = -2\left(\frac{GM}{bv_0^2}\right)^2 v_0. \tag{6.15}$$

- 天体群による天体 M の速度変化

  一様に入射する天体群による 2 体重力散乱の重ね合わせを考える．
  垂直成分は $\sum \Delta \boldsymbol{V}_{M\perp} = 0$. よって，速度変化は平行成分のみ, $\Delta \boldsymbol{V}_M = \Delta V_{M\parallel}\, \boldsymbol{v}_0/|\boldsymbol{v}_0|$.
  したがって，天体群による天体 M の速度変化は

$$\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} = \sum_{\text{単位時間あたり}} \Delta \boldsymbol{V}_M = nv_0 \int \Delta \boldsymbol{V}_M\, 2\pi b db$$
$$= -n\, v_0 \int \frac{m}{M+m}\, \frac{2v_0}{1 + \left[bv_0^2/G(M+m)\right]^2}\, \frac{\boldsymbol{V}_M}{|\boldsymbol{V}_M|}\, 2\pi b db$$
$$= -\frac{2\pi}{M+m}\left[\frac{G(M+m)}{V_M^2}\right]^2 \ln(\Lambda^2+1)\rho_m V_M \boldsymbol{V}_M. \tag{6.16}$$

  ここで，$\rho_m = mn$ は天体群の空間密度．また

$$\Lambda = \frac{b_{\max}V_M^2}{G(M+m)}. \tag{6.17}$$

  上式は，天体群との重力相互作用が天体 M の速度を減速させることを示している．
  この dynamical friction の実効的断面積は次のようになる．

$$\sigma_{\rm DF} \sim 2\pi\frac{m}{M+m}\left[\frac{G(M+m)}{V_M^2}\right]^2 \ln(\Lambda^2+1). \tag{6.18}$$

  dynamical friction は，この断面積で「ガス抵抗力」を受けていると解釈できる．

「衝突パラメータの上限 $b_{\rm max}$ について」

– (6.16) 式の b についての積分で，積分上限を無限とすると対数的に発散する．b の物理的な上限値 $b_{\rm max}$ は系の特徴的な大きさをとる（例：球状星団の半径，円盤の厚さ）．多くの系で，上で定義された Λ は > 100 と大きい．そのため，$b_{\rm max}$ の選び方に factor 2 程度の不定性があっても，対数 $\ln(\Lambda^2+1)$ への影響は小さい．

– 上式のように対数的だが積分上限 $b_{\rm max}$ が効くことから，dynamical friction では小角度散乱が重要なことがわかる．これより 2 体散乱の重ね合わせの近似が有効．

(b) 速度分布をもつ天体群中を 1 つの天体が運動する場合

- 天体群の速度分布：天体群の平均速度は 0 で，等方な Maxwell 速度分布を仮定．

$$f(|\boldsymbol{V}_m|) = \frac{1}{(2\pi\langle V_m^2\rangle)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{V}_m|^2}{2\langle V_m^2\rangle}\right). \tag{6.19}$$

- 速度分布をもつ天体群による天体 M の速度変化は，$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V}_m - \boldsymbol{V}_M$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} &= \int d^3\boldsymbol{V}_m f(V_m) \times \frac{m\,n\,v_0}{M+m}\int 2\pi b db\,\frac{2v_0}{1+\left[bv_0^2/G(M+m)\right]^2}\,\frac{\boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{v}_0|} \\ &= 2\pi\rho_m G^2(M+m)\int d^3\boldsymbol{V}_m f(V_m)\,\frac{\boldsymbol{V}_m-\boldsymbol{V}_M}{|\boldsymbol{V}_m-\boldsymbol{V}_M|^3}\ln(\Lambda^2+1).\end{aligned} \tag{6.20}$$

ここで，(6.20) 式右辺において弱い速度依存性をもつ因子 $\ln(\Lambda^2+1)$ を定数と近似しさらに「球対称密度分布中の重力場」の公式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0) = \int d^3\boldsymbol{r} G\rho(r)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}^{3} = -G\left(\int_0^{r_0}\rho(r)4\pi r^2 dr\right)\frac{\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{6.21}$$

を用いると，dynamical friction の表式を得る (Chandrasekhar 1943)

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} &= -2\pi\rho_m G^2(M+m)\ln(\Lambda^2+1)\int_0^{V_M} f(V_m)4\pi V_m^2 dV_m\,\frac{\boldsymbol{V}_M}{|\boldsymbol{V}_M|^3} \\ &= -2\pi\rho_m G^2(M+m)\ln(\Lambda^2+1)\left[\mathrm{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}}e^{-X^2}\right]\frac{\boldsymbol{V}_M}{|\boldsymbol{V}_M|^3}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで，2 番目の等号では (6.19) 式を用いた．$X = V_M/\sqrt{2\langle V_m^2\rangle}$ であり，誤差関数 $\mathrm{erf}(X)$ の定義は $\mathrm{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-x^2}dx$ である．Λ は次式で見積もるとよい．

$$\Lambda = \frac{b_{\rm max}(V_M^2 + \langle V_m^2\rangle)}{G(M+m)}. \tag{6.23}$$

- 速度分散についての大小 2 つの極限をみておこう．速度分散が小さい極限 ($\langle V_m^2\rangle \ll V_M^2$) においては，(6.22) 式は $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ なので (a) の (6.16) 式に等しくなる．逆に，速度分散が大きい場合 ($\langle V_m^2\rangle \gg V_M^2$) は，(6.22) 式の [　] の中は $4X^3/(3\sqrt{\pi})$ となり，次式を得る．

$$\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} = -\frac{2}{3}\sqrt{2\pi}\rho_m G^2(M+m)\ln(\Lambda^2+1)\frac{\boldsymbol{V}_M}{\langle V_m^2\rangle^{3/2}} \qquad (\text{for } \langle V_m^2\rangle \gg V_M^2). \tag{6.24}$$

（余談）天体群の速度分散が大きい場合に，以下の間違った見積りをしてしまうかもしれない。(a) の静止している天体群による抵抗は (6.16) と (6.18) より，$M \gg m$ の場合

$$M\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt} = -\sigma_{DF}(V_M)\,\rho_m V_M \boldsymbol{V}_M \qquad (\propto V_M^{-2}) \tag{6.25}$$

となる．同様な考えで，天体群の速度分散が大きい場合では，天体群が天体 M の進行方向前面からは相対速度 $\langle V_m^2\rangle^{1/2} + V_M$ で, 後面からは相対速度 $\langle V_m^2\rangle^{1/2} - V_M$ で入射してくることから，天体 M の速度進化をこの 2 方向からの寄与で近似的に見積もると

$$\begin{aligned} M\frac{dV_M}{dt} \simeq & -\sigma_{DF}(\langle V_m^2\rangle^{1/2} + V_M)\,\rho_m\,(\langle V_m^2\rangle^{1/2} + V_M)^2 \\ & + \sigma_{DF}(\langle V_m^2\rangle^{1/2} - V_M)\,\rho_m\,(\langle V_m^2\rangle^{1/2} - V_M)^2 \end{aligned} \tag{6.26}$$

となりそうである．右辺第 1 項は前面からの寄与で，第 2 項は後面からの寄与である．それぞれの寄与は相対速度の-2 乗に比例するため，相対速度の小さい後面からの正の寄与が卓越し，結局 (6.26) 式の右辺は正になり，天体 M は加速するという見積りとなっている。もちろん，これは (6.24) と逆符号であり**間違っている**．天体群の速度分布を正確に考慮した (6.22) 式では，速度 V_M より大きな速度をもつ天体群の成分からの寄与は打ち消し合って，より小さい速度を持つ成分からの寄与のみが効くようになっているため，天体群の速さを $\langle V_m^2\rangle^{1/2}$ とした (6.26) 式の見積りは間違いなのである．

6.2.3 2 体重力緩和の緩和時間

dynamical friction により天体速度 $\boldsymbol{V}_M$ が大きく変化する時間（緩和時間）$t_{\rm relax}$ は (6.16) 式より

$$t_{\rm relax} = V_M \Big/ \left|\frac{d\boldsymbol{V}_M}{dt}\right| \sim \frac{(V_M^2 + \langle V_m^2\rangle)^{3/2}}{2\pi\rho_m G^2 (M+m)\ln(\Lambda^2+1)} \tag{6.27}$$

で与えられる．速度分布の緩和やエネルギー等分配等の緩和過程も，この緩和時間程度で進行する．また，重力多体系における他の進化時間も以下に示しておく．

散乱時間: $t_{\rm scatter} \sim b/v \sim Gm/v^3$, 　　ビリアル平衡に要する時間: $t_{\rm virial} \sim 1/\sqrt{G\rho}$,

系全体の粘性進化時間: $t_{\rm global} \sim L^2/\nu \sim (L\Omega/v)^2 t_{\rm relax}$

6.3 微惑星円盤における速度進化

6.3.1 円盤系の特徴

(a) 運動の特徴

- 天体はほぼ「同一平面上の円軌道」を周回．離心率 e, 軌道面傾斜角 $i \ll 1$.
- 天体間の相対運動は，ランダム速度 $v \simeq (e+i)R\Omega$ とケプラーシアの速度 ($\sim \Delta R\Omega$) の重ね合わせ.

(b) 円盤系における重力緩和の特徴

- 中心星を含めた 3 体問題としての重力散乱
  - 潮汐力（太陽重力+遠心力），コリオリ力の効果

– “particle-in-a-box” 近似が有効
円盤と共に回転する系での 2 体重力散乱で近似 (コリオリ力と潮汐力を無視).
力学的摩擦によるエネルギー等分配への緩和も進行.
近似成立条件：2 体散乱時間 $b/v(= Gm/v^3) \ll$ ケプラー周期

- 粒子系の粘性加熱 (viscous stirring)
  – 3 体効果で相対速度が増加．ケプラーシアからランダム運動へのエネルギー移行.
  – 降着ガス円盤における粘性加熱と類似．粘性係数は $\nu \sim (eR)^2/t_{\rm relax}$

6.3.2 3 体問題の基礎方程式：ヒル方程式

(a) 局所回転座標系
太陽重力場内の 2 天体の重力散乱を局所回転座標系で記述.

- 仮定：$e,\, i \ll 1$ (天体は回転系座標系とほぼ一緒に運動).
- 局所回転座標系 (x, y, z)

$$\begin{cases} x = & R - R_0, \\ y = & R_0(\Theta - \Theta_0 - \Omega_0 t), \\ z = & Z. \end{cases} \tag{6.28}$$

ここで，$\Omega_0 = \Omega(R_0)$.

- 局所回転座標系におけるケプラー楕円軌道

$$\begin{aligned} x =& \quad a - R_0 && - eR_0 \cos[\Omega_0(t-\tau)], \\ y =& \ y_0 - \tfrac{3}{2}\Omega_0(a - R_0)t && + 2eR_0 \sin[\Omega_0(t-\tau)], \\ z =& && \quad iR_0 \sin[\Omega_0(t-\omega)]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

シア運動　　　エピサイクル運動（or ランダム運動）

ここで，微小量 e, i, $(a - R_0)/R_0$ の 2 次以上の量は無視した.

(b) ヒル方程式

- 局所回転座標系における 2 天体の相対運動の方程式（ヒル方程式）.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{v}}_{\text{コリオリ力}} \underbrace{+\Omega_0^2 \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}}_{\text{潮汐力}} - \frac{G(M+m)\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{6.30}$$

Fig. 3 にヒル方程式の数値解である，3 体軌道計算の結果の例を示した.

- **無次元化**: 3 体問題における特徴的な長さであるヒル半径

$$r_{\rm H} = \left(\frac{M+m}{3M_*}\right)^{1/3} R_0 \tag{6.31}$$

を用いて無次元変数 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}/r_{\rm H}$, $t' = \Omega_0 t$, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}/(r_{\rm H}\Omega_0)$ を導入する．ヒル半径は天体の重力圏半径で，天体の半径に比例する (地球の場合 $r_{\rm H} \simeq R_0/100$)．これらの無次元変数を用いると次式となる.

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} = -2\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v}' + \begin{pmatrix} 3x' \\ 0 \\ -z' \end{pmatrix} - \frac{3\boldsymbol{r}'}{r'^3} \tag{6.32}$$

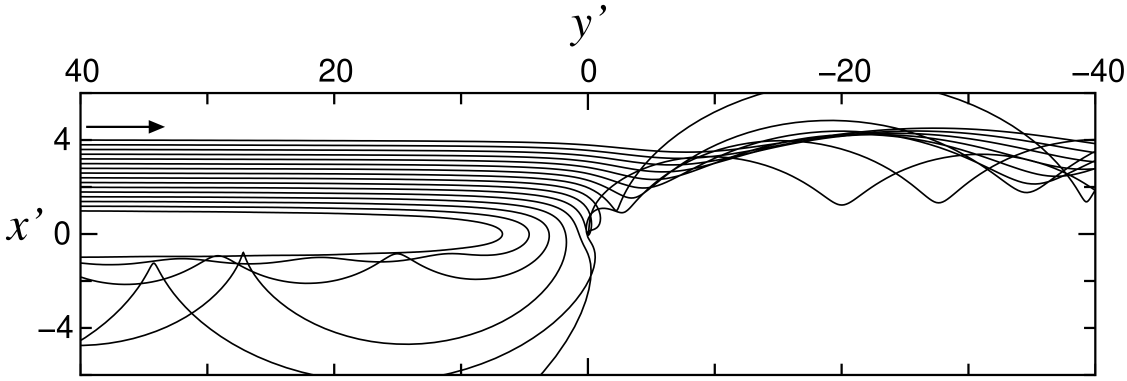

Figure 3: ヒル方程式の解のいくつかの例．$e = i = 0$ で，$x' = 1$ から 4 の間で入射させた場合．2 体散乱における双曲線軌道とは全く異なった軌道となる．

(c) 2 体散乱近似（“particle-in-a-box” 近似）の有効性
入射時に $e \gg r_{\rm H}/R_0$ の場合，最接近時付近はほぼ双曲線軌道となるため「2 体散乱近似」は有効．この条件式は惑星形成の多くの状況において満たされており，衝突確率，力学摩擦率，粘性加熱率などを見積りに 2 体散乱近似は有効な近似法である (6.3.4 参照)．

6.3.3 微惑星の粘性加熱と平衡速度

(a) 粘性加熱による微惑星集団のランダム運動の励起

- 円盤内の微惑星集団の離心率の平均値（または $\langle e^2\rangle^{1/2}$) は，互いの重力散乱により増加する（粘性加熱）．その増加率は $v = \langle e^2\rangle^{1/2} R\Omega$ として，2 体近似を用いると
$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v}{t_{\rm relax}}. \tag{6.33}$$
と見積もられる．2 体重力緩和時間 $t_{\rm relax}$ は (6.27) 式で定義されたもので，等質量系では
$$t_{\rm relax} = \frac{(2v^2)^{3/2}}{4\pi\rho_m G^2 m \ln(\Lambda^2+1)}. \tag{6.34}$$
- 微惑星円盤の厚みは v/Ω である (cf. ガス円盤の厚みは c_s/Ω) ので，密度 ρ_m は固体面密度 $\Sigma_{\rm d}$ を用いて
$$\rho_m \simeq \Sigma_{\rm d}/(v/\Omega) \tag{6.35}$$
と見積もられる．よって，$t_{\rm relax}$ は v^4 に比例し離心率 $\langle e^2\rangle^{1/2}$ は $t^{1/4}$ に比例する．
- 傾斜角 i も粘性加熱により同様な率で増加する．比 $\langle e^2\rangle^{1/2}/\langle i^2\rangle^{1/2}$ は 2 程度になる．
- 粘性加熱率のより正確な値は，ヒル方程式の数値解や近似解をもとに経験式として求められている (Stewart and Ida 2000; Ohtsuki et al. 2002, 6.3.4 も参照)．これを用いて微惑星円盤の N 体計算の結果をほぼ完全に再現できる (Fig. 4 参照)．
- 粘性加熱によるランダム速度の増加率は，微惑星円盤の粘性係数 ν と $dv^2/dt = (9/4)\nu\Omega^2$ (3.42 式参照) のように関係している．これから得られる粘性係数を用いて微惑星の動径方向の拡散を調べることができる．

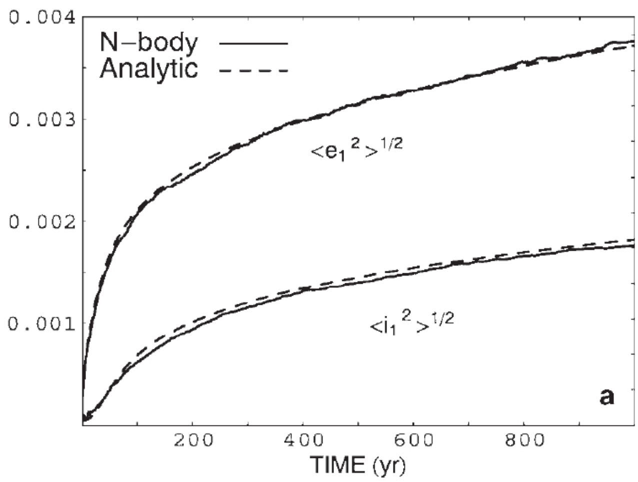

Figure 4: N 体計算の離心率と軌道傾斜角の分散の時間進化とヒル方程式から得られた粘性加熱率を用いた結果との比較 (Ohtsuki et al. 2002, Icarus 155, 436 の Fig.7 より転載). 図中の "Analytic" の点線はヒル方程式から得られた粘性加熱率による進化曲線であり, N 体計算結果をよく再現する.

(b) ガス抵抗と平衡ランダム速度

- ガス抵抗によるランダム運動の速度 v の減衰時間 $t_{\rm stop}$ は次式で与えられる.

$$t_{\rm stop} = \frac{mv}{\frac{1}{2}C_{\rm D}\pi r_m^2 \rho_{\rm g} v^2}. \tag{6.36}$$

ここで, r_m は天体 m の半径. km サイズ以上の微惑星では $C_{\rm D} = 1$ である.

- 重力散乱による粘性加熱とガス抵抗との釣り合いによりランダム速度の平衡値が決まる. その値は $t_{\rm relax} = t_{\rm stop}$ より見積もることができる. この釣り合いの式でガス密度に対し (2.7) 式を用いると, 天体の脱出速度 $v_{\rm esc} = \sqrt{2Gm/r_m}$ を用いた表式を得る.

$$\begin{aligned} v &\simeq \left[\sqrt{\pi}\frac{\Sigma_{\rm d}}{\Sigma_{\rm g}}\frac{c_{\rm s}}{v_{\rm esc}}\ln(\Lambda^2+1)\right]^{1/5} v_{\rm esc} \\ &\simeq \frac{1}{3}\left(\frac{\Sigma_{\rm d}/\Sigma_{\rm g}}{1/250}\right)^{1/5}\left(\frac{c_{\rm s}}{1{\rm km\ s^{-1}}}\right)^{1/5}\left(\frac{r_m}{r_{\rm Earth}}\right)^{-1/5} v_{\rm esc}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

- **サイズ分布をもつ微惑星集団の平衡ランダム速度**：上の見積りでは, 等質量系を仮定した. 次章でみるように, 惑星形成では暴走成長により幅広いサイズ分布がつくられる. サイズ分布がある場合は dynamical friction（エネルギー等分配) の効果により, 大きな天体のランダム速度は小さな天体に比べ小さくなる. その場合小さな天体の平衡のランダム速度は, (6.37) 式で $v_{\rm esc}$ と $\Sigma_{\rm d}$ には大きな天体の脱出速度と面密度, $r_{\rm m}$ に小さな天体の半径を用いることで見積もることができる.

6.3.4 3 体効果を考慮した微惑星ランダム速度進化率の経験式

3 体効果を考慮した微惑星のランダム速度進化率の定式化や, 3 体散乱の数値計算による進化率の算出, 半解析的な経験式の導出は Ida (1990), Tanaka and Ida (1996), Ohtsuki (1999), Stewart and Ida (2000) により発展し, Ohtsuki et al. (2002) により完成した. これらの結果を紹介する.

(a) ランダム速度が小さい場合のランダム速度増加率の見積り (ケプラーシア卓越領域)

微惑星のランダム速度 v がケプラーシアの速度 $\sim \Delta R\Omega$ (ΔR は軌道半径の差) に比べ小さい場合は 3 体効果が強く効いて重力散乱の軌道は 2 体での双曲線軌道と大きく異なり (Fig. 2)，速度増加率も (6.33) 式と異なる．厳密な表式を紹介する前に，このケプラーシア卓越領域におけるランダム速度増加率を見積もっておく．ここでは等質量の微惑星系を考える．

ケプラーシア卓越領域おける重力散乱は次の特徴をもつ．

・入射速度は $v_0 \sim \frac{3}{2}\Delta R\Omega$．衝突パラメータは $b \sim \Delta R$.
・2 次元的な散乱 (円盤厚さ $\Delta z \sim v/\Omega$ は ΔR に比べ小さい)

これより，(6.14) 式を用いてランダム速度増加率は次式のように見積もられる．

$$\frac{dv^2}{dt} \simeq \int (\Delta v_\perp)^2 \, n_s \, \frac{3}{2}\Omega b \, db \sim v_0^2 \left(\frac{2Gm}{bv_0^2}\right)^2 b^2 n_s \Omega. \tag{6.38}$$

ここで，$n_s = \Sigma_d/m$ は微惑星の面数密度である．速度増加に最も効果的な重力散乱の衝突パラメータ b の値は条件 $2Gm/(bv_0^2) \sim 1$ で決まる．この条件とケプラーシアの速度の式 $v_0 \sim b\Omega$ より

$$b \sim \left(\frac{2Gm}{\Omega^2}\right)^{1/3}, \qquad v_0 \sim (2Gm\Omega)^{1/3} \tag{6.39}$$

を得る．b の見積り値は (6.31) 式のヒル半径 r_H と同程度である．またこの v_0 よりもランダム速度 v が小さい場合，すなわち $v < (2Gm\Omega)^{1/3}$ の場合がケプラーシア卓越領域である．(6.39) 式を代入すると，ケプラーシア卓越領域おけるランダム速度増加率は次式となる[4].

$$\frac{dv^2}{dt} \sim \left(\frac{2Gm}{\Omega^2}\right)^{4/3} n_s \Omega^3, \qquad \text{for } v < (2Gm\Omega)^{1/3}. \tag{6.40}$$

逆に，$v > (2Gm\Omega)^{1/3}$ の場合は速度分散卓越領域と呼ばれ，2 体近似がよく成り立ち，(6.33) 式がランダム速度増加率のよい見積りとなる．両領域でのランダム速度増加率の見積りは，それらの境界 $v \sim (2Gm\Omega)^{1/3}$ で同程度となっている．

(b) 等質量系におけるランダム速度増加率の表式

微惑星集団のランダム速度の分散は離心率と軌道傾斜角それぞれの分散 $\langle e^2\rangle$, $\langle i^2\rangle$ により $v^2 \sim (\langle e^2\rangle + \langle i^2\rangle)R^2\Omega^2$ と与えられる．等質量系では，これらの分散は粘性加熱により上昇し，その増加率は次式で与えられる (Ida 1990; Ohtsuki 1999).

$$\frac{d\langle e^2\rangle}{dt} = \frac{1}{4}\langle P_\mathrm{VS}\rangle h^4 n_s R^2 \Omega, \qquad \frac{d\langle i^2\rangle}{dt} = \frac{1}{4}\langle Q_\mathrm{VS}\rangle h^4 n_s R^2 \Omega. \tag{6.41}$$

ここで，$h = r_\mathrm{H}/R = (2Gm/3\Omega^2)^{1/3}/R$ は無次元ヒル半径である．また，無次元係数 $\langle P_\mathrm{VS}\rangle$, $\langle Q_\mathrm{VS}\rangle$ は h で規格化された相対軌道の離心率と軌道傾斜角の分散 $\langle \tilde{e}^2\rangle$, $\langle \tilde{i}^2\rangle$ の関数である (詳細は後述).

(c) 質量分布がある系におけるランダム速度増加率の正確な表式

微惑星集団が質量分布を持つ場合，各質量 m_i で異なる速度分散 ($\langle e_i^2\rangle$, $\langle i_i^2\rangle$) をもち，異なる変化率で進化する．それら各分散は一般にエネルギー等分配からずれており，等分配へと向かわせる dynamical friction も働く．また，それらの変化率は各質量からの寄与の足し合わせで与えられる．よって，質量分布がある系におけるそれら各離心率の分散 $\langle e_i^2\rangle$ と $\langle i_i^2\rangle$ の変化率は次式で与えられる (Ohtsuki 1999).

[4]ケプラーシア卓越領域での散乱は 2 次元的であるため，主に離心率が増加し，軌道傾斜角の増加率は小さい．

$$\frac{d\langle e_i^2\rangle}{dt} = R^2\,\Omega\sum_j n_{s,j}\,h_{ij}\left(\frac{m_j}{m_i+m_j}\right)^2\left[\langle P_{\rm VS}\rangle + \frac{\langle e_j^2\rangle-(m_i/m_j)\langle e_i^2\rangle}{\langle e_j^2\rangle+\langle e_i^2\rangle}\langle P_{\rm DF}\rangle\right],$$

$$\frac{d\langle i_i^2\rangle}{dt} = R^2\,\Omega\sum_j n_{s,j}\,h_{ij}\left(\frac{m_j}{m_i+m_j}\right)^2\left[\langle Q_{\rm VS}\rangle + \frac{\langle i_j^2\rangle-(m_i/m_j)\langle i_i^2\rangle}{\langle i_j^2\rangle+\langle i_i^2\rangle}\langle Q_{\rm DF}\rangle\right]. \tag{6.42}$$

ここで，無次元ヒル半径 h_{ij} は $h_{ij} = [G(m_i+m_j)/3\Omega^2]^{1/3}/R$ と一般化される．また dynamical friction の項の係数 $\langle P_{\rm DF}\rangle$, $\langle Q_{\rm DF}\rangle$ は，$\langle P_{\rm VS}\rangle$ などと同様に規格化された相対軌道の離心率と軌道傾斜角の分散 $\langle\tilde{e}^2\rangle$, $\langle\tilde{i}^2\rangle$ の関数である．規格化された相対軌道の離心率と軌道傾斜角の分散は

$$\langle\tilde{e}^2\rangle = (\langle e_i^2\rangle+\langle e_j^2\rangle)h_{ij}^{-2}, \qquad \langle\tilde{i}^2\rangle = (\langle i_i^2\rangle+\langle i_j^2\rangle)h_{ij}^{-2} \tag{6.43}$$

と散乱する 2 体各質量の離心率の分散の和で定義される．

(d) ランダム速度変化率を決める各係数の概形

上の離心率と軌道傾斜角の分散の変化率の表式に含まれる各係数の近似的な表式は Ohtsuki et al. (2002) で与えられている．ここではその概略を説明しておく．各係数の関数形はケプラーシア卓越領域と速度分散卓越領域で異なる．速度分散が小さいケプラーシア卓越領域 ($\langle\tilde{e}^2\rangle \ll 1$) において各係数は

$$\langle P_{\rm VS}\rangle \simeq 73, \qquad \langle Q_{\rm VS}\rangle \simeq 4\langle\tilde{i}^2\rangle, \qquad \langle P_{\rm DF}\rangle \simeq 10\langle\tilde{e}^2\rangle, \qquad \langle Q_{\rm DF}\rangle \simeq 10\langle\tilde{i}^2\rangle \tag{6.44}$$

で与えられる．ケプラーシア卓越領域では，$\langle P_{\rm VS}\rangle$ による離心率の増加により速度分散の増加が決まり，(6.40) 式と同程度となる．

速度分散卓越領域 ($\langle\tilde{e}^2\rangle \gg 1$) では，各係数は比 $\langle\tilde{i}^2\rangle^{1/2}/\langle\tilde{e}^2\rangle^{1/2}$ に強く依存するが，重力散乱による進化の結果，この比はほぼ 1/2 になることが分かっている[5]．比 $\langle\tilde{i}^2\rangle^{1/2}/\langle\tilde{e}^2\rangle^{1/2}$ が 1/2 の場合，各係数はおおよそ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
&\langle P_{\rm VS}\rangle \simeq \frac{150}{\langle\tilde{e}^2\rangle}\ln(\Lambda^2+1), \quad \langle P_{\rm DF}\rangle \simeq \frac{310}{\langle\tilde{e}^2\rangle}\ln(\Lambda^2+1),\\
&\langle Q_{\rm VS}\rangle \simeq \frac{41}{\langle\tilde{e}^2\rangle}\ln(\Lambda^2+1), \quad \langle Q_{\rm DF}\rangle \simeq \frac{55}{\langle\tilde{e}^2\rangle}\ln(\Lambda^2+1), \qquad \text{for } \langle\tilde{i}^2\rangle^{1/2}/\langle\tilde{e}^2\rangle^{1/2} = 1/2.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

ここで，$\Lambda = (\langle\tilde{e}^2\rangle+\langle\tilde{i}^2\rangle)\langle\tilde{i}^2\rangle^{1/2}/12$ である．この速度分散卓越領域の結果を 6.3.3(a) で見積もったランダム速度の増加率と比較しておく．ランダム速度の分散と $v^2 = (\langle e^2\rangle+\langle i^2\rangle)R^2\Omega^2$ で関係づけると，等質量系に対するここでの結果 (6.41), (6.45) 式より

$$\frac{dv^2}{dt} \simeq 13\left(\frac{Gm}{v^2}\right)^2\ln(\Lambda^2+1)n_s\Omega \tag{6.46}$$

を得る．これは (6.33)-(6.35) 式から求まる dv^2/dt の約 1.5 倍である．

速度分散が中程度で両領域の間にある場合は，上の両極限の表式をうまく足し合わせることで各係数の近似的表式を得ることができる．詳細は Ohtsuki et al. (2002) を参照されたい．

[5] 3 体計算に基づいた離心率と軌道傾斜角の分散の変化率 ([6.41] または [6.42] 式) より，速度分散卓越領域で $\langle\tilde{i}^2\rangle^{1/2}/\langle\tilde{e}^2\rangle^{1/2} \simeq 1/2$ となるよう両分散が進化することが示されており (e.g., Ohtsuki et al. 2002)，また N 体計算からも同様な結果が得られている．

7 惑星集積過程

7.1 惑星集積時間の簡単な見積り

- 惑星の成長方程式（$v_m \gg v_M$ の場合, 完全合体を仮定）
$$\frac{dM}{dt} = \rho_m \sigma_{\rm col} v_m \tag{7.1}$$
- 衝突断面積（$M \gg m$, $v_m \gg v_M$ の場合）
  - エネルギー保存： $\frac{1}{2} v_m^2 = \frac{1}{2} v_m'^2 - GM/r_M$
  - 角運動量保存 ： $b\, v_m = r_M\, v_m'$

  これらより衝突断面積は
$$\sigma_{\rm col} = \pi r_M^2 \left(1 + \frac{2GM}{r_M v_m^2}\right). \tag{7.2}$$
  天体 M の衝突断面積は重力によって増大する.
- 微惑星空間密度は (6.35) 式より $\rho_m \simeq \Sigma_{\rm d}\Omega / v_m$
- 集積時間（$M \gg m$, $v_m \gg v_M$ の場合）
$$t_{\rm grow} = \frac{M}{\frac{dM}{dt}} \simeq \frac{M}{\pi r_M^2 \Sigma_{\rm d}\Omega}\left(1 + \frac{2GM}{r_M v_m^2}\right)^{-1} \tag{7.3}$$
  等質量天体系 ($M = m$) に対して, $v_m \simeq v_{\rm esc}/3$ を仮定して林モデル円盤を考えると
$$t_{\rm grow} = \begin{cases} 3\times 10^6 \left(\dfrac{M}{M_{\rm Earth}}\right)^{1/3}\left(\dfrac{R}{1{\rm AU}}\right)^3 \ {\rm yr} \quad (R < 2.7{\rm AU}) \\ 1\times 10^8 \left(\dfrac{M}{M_{\rm Earth}}\right)^{1/3}\left(\dfrac{R}{5{\rm AU}}\right)^3 \ {\rm yr} \quad (R > 2.7{\rm AU}) \end{cases} \tag{7.4}$$
  ガス捕獲に必要な 10 地球質量の固体核に成長する時間は，木星軌道 (5AU) では 2×10^8 年, 海王星軌道 (30AU) では 4×10^{10} 年となり，ガス円盤の寿命 (10^7 年）に比べて長すぎる.

  ⇒「木星型惑星形成時間の問題」

課題 6: 3 体軌道計算の結果によると，惑星への微惑星の衝突断面積は (7.2) 式に比べ約 5 倍大きい (e.g., Ida and Nakazawa 1989; Greenzweig and Lissauer 1992). また，惑星に小さな微惑星が集積することを考慮すると，その微惑星の速度 (分散) は $v_m \simeq v_{\rm esc,M}/6$ と遅くなる (Ida and Makino 1993). これらを考慮し，林モデル円盤の 1AU での地球の集積時間 $t_{\rm grow}$ は 40 万年程度と見積もられることを示せ.

7.2 惑星集積の現代的モデル

・惑星集積前半： **暴走成長** (runaway growth) と**寡占的成長** (oligarchic growth)
・惑星集積後半： 地球型惑星の**巨大衝突** (giant impact) と木星型惑星によるガス捕獲

（惑星落下問題については後で述べる.）

7.2.1 暴走成長 (runaway growth)

- 単純なモデルにおける暴走成長

– 2 質量天体系： 天体群 m (小さい・多数) と天体群 M (大きい・少数)

– 仮定：天体 m のランダム速度 v_m は, 大きな天体の脱出速度 $v_{\mathrm{esc},\,M}$ より小さく，質量 M に依存しない.

– 大きな天体の成長時間は (7.3) 式より, $t_{\mathrm{grow}} \propto v_m^2 M^{-1/3}$.

大きい微惑星ほど成長が加速される ⇒ 暴走的な成長

（大きい微惑星の成長が遅くなっている場合は秩序的成長.）

- N 体数値計算等による質量分布進化の結果（Fig. 5）

  – べき質量分布を形成（べき指数はおおよそ -2.5）

  – 簡単なモデルとは異なり，分布先端の質量 M が増加するとともに小さな天体の ランダム速度は増大 ($v_m \propto M^{1/6}$). その結果，分布先端では $t_{\mathrm{grow}} \propto M^0$ となり時間に対し指数関数的な成長が起こる.

7.2.2 寡占的成長 (oligarchic growth)

- N 体数値計算 (Kokubo et al. 1998) により発見 (Fig. 6a)

- 少数の原始惑星がそれぞれ一定の「なわばり」をもちつつ成長．なわばりの動径方向の幅は $\Delta R \sim 10 r_{\mathrm{H}} \quad (\propto M^{1/3})$

- 成長時間は徐々に長くなる：$t_{\mathrm{grow}} \propto M^{1/3}$

  微惑星ランダム速度が $v_m \sim v_{\mathrm{esc},M}/6$ と比較的小さい等の原因のために, 成長時間は (7.4) 式の見積りより 1 桁程度短縮. これで木星形成時間の問題はほぼ解決される．土星や天王星, 海王星の形成時間はまだ長すぎる．これらの惑星は内側で形成された後に外側に移動したとする説が有力.

- 質量分布は二極分化（寡占的成長）

  - 速度の遅い中程度質量の微惑星は早期に原始惑星へ集積し消失.
  - 大きな原始惑星の間の質量比は大きくならない

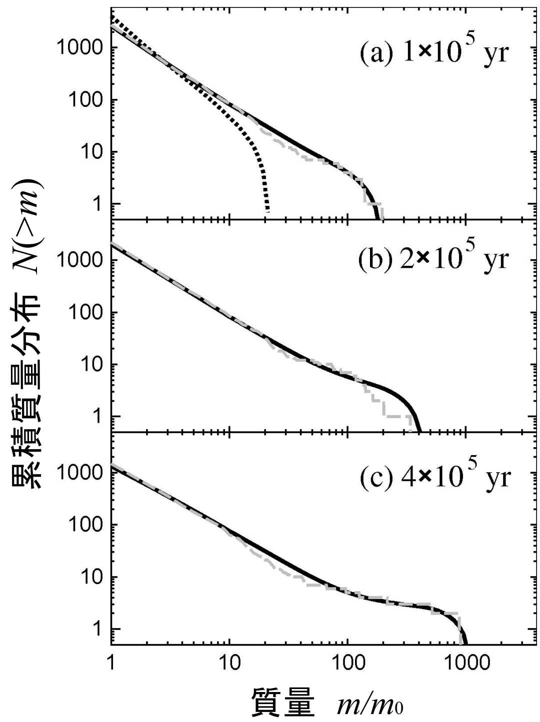

Figure 5: N 体数値計算で得られた暴走成長における累積質量分布の進化 (Kobayashi et al. 2010, Icarus の図 1 より転載)．灰色の破線が N 体数値計算 (Kokubo et al. 2000) の結果．点線は初期質量分布．実線は，3 体問題計算より得られた衝突確率や粘性加熱率を用いた運動論的方程式から求められたもの．最後の時間 (c) では，サイズ分布は二極化しており寡占的成長が進行している．

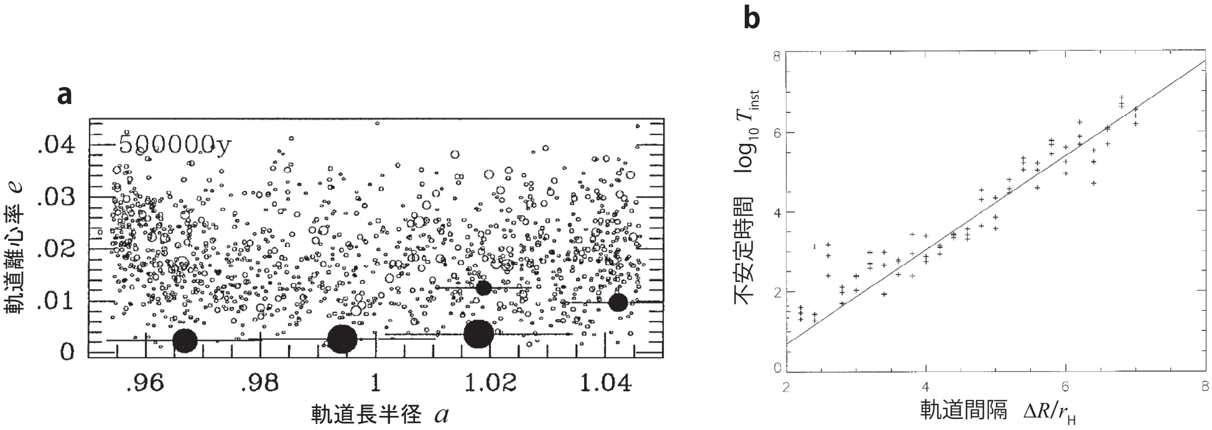

Figure 6: (a) N 体数値計算で明らかになった寡占的成長の様子 (Kokubo et al. 2000, Icarus の図 7 より転載)．軌道長半径-離心率平面にて，原始惑星（●）と微惑星（○）の分布を示した．各丸印の大きさは天体半径に比例している．原始惑星に付けた横棒は両側合わせて $10r_{\rm H}$ の長さをもつ．(b) 軌道不安定になる時間と原始惑星間隔の関係 (Chambers et al. 1996, Icarus の図 1 より転載)．3 つの原始惑星を軌道間隔 ΔR で置き数値軌道計算で軌道交差するまでの時間を調べた．各軌道間隔において，3 通りの原始惑星の初期配置角度に対して計算を行っている．原始惑星の質量は 1/3 地球質量.

- 寡占的成長の最終質量，孤立質量
  寡占的成長で，すべての微惑星が原始惑星へ集積すると成長は停止する．このときの原始惑星質量は孤立質量 (isolation mass) と呼ばれる．孤立質量 $M_{\rm iso}$ は次の式で与えられる．

$$M_{\rm iso} = \Sigma_{\rm d}\, 2\pi R \Delta R. \tag{7.5}$$

  $\Delta R = b\, r_{\rm H}$ とし，林モデル円盤の面密度を用いると

$$M_{\rm iso} = \sqrt{\frac{(2\pi b R^2 \Sigma_{\rm d})^3}{3M_{\rm star}}} = \begin{cases} 0.1 \left(\dfrac{b}{10}\right)^{3/2} \left(\dfrac{R}{1{\rm AU}}\right)^{3/4} M_\oplus & (R < 2.7{\rm AU}), \\ 3 \left(\dfrac{b}{10}\right)^{3/2} \left(\dfrac{R}{5{\rm AU}}\right)^{3/4} M_\oplus & (R > 2.7{\rm AU}). \end{cases} \tag{7.6}$$

  1AU では, 原始惑星の寡占的成長は火星質量程度で停止する．地球と金星の間隔は約 $30r_{\rm H}$ で寡占的成長の間隔より広い．地球や金星の形成には以下の原始惑星同士の巨大衝突が必要.

7.2.3 巨大衝突 (giant impact)

- 寡占的成長後の原始惑星同士の衝突は長期軌道不安定による離心率増加によって起こる．これは長期の軌道数値計算 (Chambers et al. 1996) によって示された.
- 不安定（軌道交差）になる時間は原始惑星間隔 ΔR に対し指数的に増大 (Fig. 6b)．但し，不安定時間は原始惑星の初期配置角度にも依存し 1 桁程度の不定性がある．$\Delta R = 8r_{\rm H}$ の場合には，軌道不安定になるまでにおおよそ 10^8 年かかる.
- 長期軌道不安定は林ガス円盤内では抑制され起こらないため，円盤ガス消失後に巨大衝突は起こる．⇒ 木星形成後に地球完成か？

- 月は地球の巨大衝突でつくられたとする説が有力.
- 系外惑星の巨大惑星には離心率の大きいものが多い. これらはエキセントリックプラネットと呼ばれている. エキセントリックプラネットは幾つかの巨大惑星が形成された後に軌道不安定を起こした結果つくられたと考えられている.

7.2.4 小石集積 (pebble accretion)

小石集積とは, 微惑星を経由せず, 大きめのダストである小石 (pebble) が直接惑星へ集積する集積様式. 小石集積によって惑星成長が大幅に加速すると期待されている.

- 小石集積の集積半径

  惑星から b だけ離れた地点での惑星への落下の終端速度 $v_{\rm ter}$ は $\dfrac{v_{\rm ter}}{t_{\rm stop}} = \dfrac{GM_p}{b^2}$ より

  $$v_{\rm ter} = \frac{GM_p t_{\rm stop}}{b^2}. \tag{7.7}$$

  この終端速度が惑星との相対速度より大きければ集積可能. 相対速度がシア速度 $\frac{3}{2}\Omega b$ で与えられるとすると, 集積条件は $GM_p t_{\rm stop}/b^2 > \frac{3}{2}\Omega b$ となり, (最大) 集積半径は

  $$b_{\rm peb} = \left(\frac{2GM_p t_{\rm stop}}{3\Omega}\right)^{1/3} = r_H(2t_{\rm stop}\Omega)^{1/3} \tag{7.8}$$

  となる. $t_{\rm stop}\Omega \sim 1$ の小石では, 集積半径はヒル半径程度と非常に大きくなる. また, $t_{\rm stop}\Omega > 10^{-3}$ であれば, 微惑星の惑星への衝突断面積の半径より大きくなる.

- 小石集積率は, 小石の面密度 $\Sigma_{\rm peb}$ を用いて次で見積ることができる.

  $$\frac{dM_p}{dt} \sim \Sigma_{\rm peb}\, b_{\rm peb}^2\, \Omega = \Sigma_{\rm peb}\, r_H^2(2t_{\rm stop}\Omega)^{2/3}\, \Omega. \tag{7.9}$$

- 小石集積の効率

  小石の落下速度は (4.10) 式より $V_R = 2\eta R\, \Omega\, (t_{\rm stop}\Omega)$ と速いため, 落下で消失し $\Sigma_{\rm peb}$ が低下してしまう可能性がある. 円盤内側への小石の降着率 $\frac{dM_{\rm peb}}{dt}$ は

  $$\frac{dM_{\rm peb}}{dt} = 2\pi R\Sigma_{\rm peb}V_R = 2\pi R\Sigma_{\rm peb}\eta R\Omega(2t_{\rm stop}\Omega). \tag{7.10}$$

  で与えられる. (7.9), (7.10) 式から $\Sigma_{\rm peb}$ を消去すると

  $$\begin{aligned} \frac{dM_p}{dt} &\sim \left(\frac{r_H}{R}\right)^2 (2\pi\eta)^{-1}\,(2t_{\rm stop}\Omega)^{-1/3}\,\frac{dM_{\rm peb}}{dt} \\ &\simeq 0.01\left(\frac{M_p}{M_\oplus}\right)^{2/3}\left(\frac{\eta}{2\times 10^{-3}}\right)^{-1}(t_{\rm stop}\Omega)^{-1/3}\,\frac{dM_{\rm peb}}{dt}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

  よって, $t_{\rm stop}\Omega \sim 1$ の場合, 円盤内側への小石降着の 1%程度しか, 惑星に集積しない. 惑星質量が地球より軽くなると, 小石集積の効率はさらに小さくなる. また, $\eta \propto R^{1/2}$ という比例関係より円盤外側では小石集積の効率は減少する. (7.11) 式によると, 小石サイズを小さくし $t_{\rm stop}\Omega$ を小さくすれば小石集積の効率が上がる見積りとなっているが, 小石集積をより詳細に調べた Okamura and Kobayashi (2021) の数値計算結果によると $t_{\rm stop}\Omega < 0.1$ で

は，小石集積の効率は小石サイズとともに減少することが報告されている．このように，小石集積の効率が低いため，小石集積で惑星をつくるためには大量の小石を円盤外側から供給する必要がある．小石集積による惑星形成にもこのような問題がある．

8　微惑星の衝突破壊

微惑星のランダム速度が原始惑星の摂動により十分加速されると，微惑星間の衝突破壊が顕著になる．自己重力で集積している微惑星の場合，微惑星のランダム速度がその脱出速度を超えると破壊が顕著になると期待される．しかし，以下の詳細な見積りによると微惑星はそれよりもずっと破壊されにくい．その詳細な見積りのためまず天体の衝突破壊の物理について説明する．

8.1　天体衝突破壊のスケーリング則

高速衝突における天体破壊について考える．高速衝突では小さな衝突体で被衝突天体の広範囲を破壊し大量の破片を放出させることが可能である．そのため点源爆発の近似が有効であり，衝突破壊の結果は様々な衝突条件に対して自己相似的となる[6]．

一般の衝突破壊の結果は衝突天体 (impactor) の半径 R_{imp} と衝突速度 v_{imp} とに独立に依存する．これに対し点源近似が有効な高速衝突における破壊は，カップリングパラメータと呼ばれる

$$C = R_{\mathrm{imp}} v_{\mathrm{imp}}^{\mu} \tag{8.1}$$

という 1 つの量で決まることが知られている (Housen and Holsapple 2011) [7]．べき指数 μ は衝突された天体 (target) の物性に依存する定数で，多くの物質で 0.41 (砂) 〜 0.55 (岩石，水) の間の値をとる．この他，衝突破壊の結果はターゲット天体の破壊強度や重力，密度に依存する[8]．このカップリングパラメータに対する依存性より天体衝突破壊のスケーリング則が構築されている．

カップリングパラメータを用いて，衝突破壊で生成される破片の速度分布を導出してみよう．ターゲット天体表面からの放出速度が v よりも速い破片の総質量 $M_f(>v)$ は，破片の積算速度分布を与える．$M_f(>v)$ は速度の閾値 v とカップリングパラメータ C，ターゲットの密度 ρ に依存する．低速度の破片の総質量はターゲット天体の破壊強度や重力にも依存する．実際，形成されるクレータ全体の大きさや容積は破壊強度や重力に依存する．一方，破片の高速度成分は破壊の激しい衝突点付近から放出され，それらの破片の運動は破壊強度や重力に影響されない．そのため，十分速い閾値 v に対し $M_f(>v)$ は C と v と ρ のみに依存し，質量の次元をもつ $M_f(>v)$ は次元解析により

$$M_f(>v) = A\rho C^3 / v^{3\mu} \tag{8.2}$$

の形で与えられる．無次元の係数 A はターゲットの物性に依存する．衝突の室内実験より，ターゲットが砂の場合 $A = 0.14$ で，岩の場合 0.59 と得られている．

スケーリング則は点源近似に基づいているため，(8.2) の公式は，$M_f(>v)$ がインパクター質量 m_{imp} と同程度となる非常に高速度な成分には適用できないと予想される．しかしながら，室

[6] 100m/s 以上の衝突であれば，このような点源近似は良い近似である．地球サイズの摂動天体のまわりでは微惑星の衝突速度は 1km/s 以上となり，この条件は満たされる．

[7] 実際は，カップリングパラメータの他に，衝突角度も衝突破壊の結果を左右する．多くの衝突実験で主に正面衝突 (衝突角度 90 度）が調べられているが，斜め衝突の場合には v_{imp} を法線方向成分 $v_{\mathrm{imp}} \sin\theta$ で置き換えることで正面衝突の結果を適用できる．

[8] 衝突破壊のスケーリング則では，impactor と target の密度が異なる場合も考えられているが，ここでは両者の密度は同じとする．

内衝突実験や数値計算の結果から，$M_f(>v) \sim m_{\rm imp}$ の範囲でもこの公式は適用可能であることが示されている．$M_f(>v) = m_{\rm imp}$ となる放出速度閾値 v は，砂のターゲットの場合は衝突速度の 1/16 で，岩の場合は 1/3 である．

衝突の結果ターゲット天体から放出される質量 $M_{\rm eject}$ も見積ることができる．$M_{\rm eject}$ は脱出速度を越えた速度をもつ破片の総質量であるので

$$M_{\rm eject} = M_f(> v_{\rm esc}) = \frac{3A}{4\pi}\left(\frac{v_{\rm imp}}{v_{\rm esc}}\right)^{3\mu} m_{\rm imp} \tag{8.3}$$

を得る．これより，$M_{\rm eject} > m_{\rm imp}$ となるのは，衝突速度が脱出速度の 16 倍 (砂）または 3 倍 (岩）を越える場合であることがわかる．

(8.3) 式は破壊強度が重要でない重力支配域に対する公式である．半径が約 10km 程度以上の天体 (脱出速度が約 10m/s 以上の天体) であれば重力支配域に対する (8.3) 式が使える．強度の低いラッブルパイル天体であればさらに小さい天体でも適用可能である．惑星形成時の微惑星天体は，頻繁に衝突を繰り返していて多くのひび割れや掘削を経験していると考えられ，ラッブルパイル天体を想定するのが自然であろう．ラッブルパイル天体には，上記のスケーリング則で「砂」の場合が適用される．

天体衝突による大規模破壊の条件を議論する上で，衝突エネルギー $E_{\rm imp}$ または $Q = E_{\rm imp}/m_{\rm tar}$ という量がよく用いられる．特に，$M_{\rm eject} = m_{\rm tar}/2$ という破壊を起こす Q の値は Q_D^* と呼ばれ，多くの研究で大規模破壊のため衝突エネルギーの閾値として用いられる．この閾値 Q_D^* はスケーリング則から見積もることができる．(8.3) 式より，$M_{\rm eject} = m_{\rm tar}/2$ という大規模破壊を起こすインパクターの質量は，重力支配の場合

$$m_{\rm imp}^* = \frac{2\pi}{3A}\left(\frac{v_{\rm esc}}{v_{\rm imp}}\right)^{3\mu} m_{\rm tar} \tag{8.4}$$

と見積もられる．これより，重力支配の場合での Q_D^* は次式でおおよそ与えられる．

$$Q_D^* = \frac{1}{2} m_{\rm imp}^* v_{\rm imp}^2 / m_{\rm tar} = \frac{\pi}{3A}\left(\frac{v_{\rm esc}}{v_{\rm imp}}\right)^{3\mu} v_{\rm imp}^2 \tag{8.5}$$

$3\mu < 2$ であるので，Q_D^* は衝突速度の増加関数である．小さなインパクターを高速度で衝突させ大規模破壊を引き起こす場合，大きなインパクターの場合に比べて，より大きな衝突エネルギーが必要になる．

厳密に考えると，(8.2) 式はクレーターをつくる小規模な破壊を想定しターゲット半径依存性を無視し導出されていた．そのため $M_{\rm eject} \sim m_{\rm tar}$ となる大規模破壊に対しては適用できないと予想される．しかしながら，天体衝突の数値計算の結果から，$M_{\rm eject} = m_{\rm tar}/2$ となる衝突破壊でも (8.3) 式はよい精度で成り立つことが示されている (Suetsugu et al. 2018).

重力よりも破壊強度で衝突破壊が決まる場合についても述べておく．強度支配の場合には，破片速度分布に実質的な下限速度がある．その下限速度は破壊強度 Y を用いて $\sim (Y/\rho)^{1/2}$ と与えられる．下限速度 $\sim (Y/\rho)^{1/2}$ が脱出速度より大きい場合が，強度支配の場合にあたる．重力支配の場合の (8.3)-(8.5) 式で，$v_{\rm esc}$ を $(Y/\rho)^{1/2}$ で置き換えることで，強度支配の場合の式を得ることができる．

8.2 惑星形成時の微惑星の破壊条件

前節の結果より，微惑星がラッブルパイル天体のようなものだと想定すると質量 m の微惑星の衝突破壊の条件は

$$v_{\rm imp} > 16 v_{\rm esc}(m) \tag{8.6}$$

となる．微惑星天体が固結した岩石や氷でできている場合，より低速度で破壊が起こる．一方，微惑星の衝突速度はそれらのランダム速度程度である．惑星形成時のランダム速度は，摂動天体である大きな惑星の質量 M と円盤ガス密度に依存するが，最小質量円盤では次式で与えられる．

$$v_{\rm imp} \simeq \frac{1}{6} v_{\rm esc}(M) = 1.8 \left(\frac{M}{M_\oplus} \right)^{1/3} {\rm km/s}. \tag{8.7}$$

よって，微惑星の破壊条件 (8.6) は

$$v_{\rm esc}(m) < \frac{1}{100} v_{\rm esc}(M) \tag{8.8}$$

となる．脱出速度は 天体半径と密度の 1/2 乗に比例するので，衝突で破壊される微惑星の半径に対する条件は

$$R_m < \frac{1}{100} \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/2} R_M \tag{8.9}$$

となる．例えば，摂動天体が地球質量であるときには半径 90km 以下の微惑星が破壊される．微惑星天体が固結した岩石や氷でできている場合はより大きい半径でも破壊が起こる．

衝突破壊は衝突時間程度で進行する．衝突時間 $t_{\rm col}$ は

$$t_{\rm col} = (n\sigma v_{\rm imp})^{-1} \tag{8.10}$$

で見積もられる．天体は全て半径 R, 質量 $m = 4\pi\rho R^3/3$ をもつとすると，衝突断面積 σ は $4\pi R^2$ で，数密度 n は固体面密度 $\Sigma_{\rm d}$ を用いて $n = \Sigma_{\rm d}/(mH)$ で与えられる．また微惑星分布の厚さ H は v/Ω である．これらより，衝突時間は，最小質量円盤の固体面密度を用いて

$$t_{\rm col} = \frac{\rho R}{3\Sigma_{\rm d}\Omega} = 2 \times 10^5 \left(\frac{R}{100{\rm km}} \right) \left(\frac{r}{1{\rm au}} \right)^3 {\rm yr} \tag{8.11}$$

と見積もられる．この時間で衝突破壊は進行する．その結果惑星成長の材料である微惑星が衝突破壊により失われることで，惑星成長は阻害されてしまう (Kobayashi & Tanaka 2018).

8.3 衝突破壊でつくられる天体サイズ分布

摂動天体のまわりで小天体は破壊されることを上で示した．ここではその天体の衝突破壊過程について考えてみよう．衝突破壊によって天体は小さな破片となる．生成された破片は摂動天体の摂動を受け再度高速衝突を起こし破壊される．この連鎖的な衝突破壊は衝突カスケードと呼ばれる．衝突カスケードが起こった結果，天体は極めて小さな破片へと変換される．

衝突カスケードの結果生成された破片はべきサイズ分布を持つことが知られている．実際，多数回の衝突破壊の結果形成されたと考えられている小惑星やカイパーベルト天体のサイズ分布のべき指数は-3 程度と観測から見積もられている (Bottke et al. 2005; Fraser et al. 2014).

衝突カスケードによるサイズ分布は，最終的にはミクロンサイズのダストにまで続く．このサイズ以下になるとダストは中心の恒星の輻射圧により飛ばされ失われる．太陽系以外の，他の惑星系における衝突カスケードは，デブリ円盤としてそのダスト成分が観測されている．以下では，衝突カスケードでどのようにべきサイズ分布がつくられるかを見てみよう．

(a) 自己相似的な衝突による衝突カスケード

衝突カスケードでは，大きな天体が破壊され，さらに多数回の衝突破壊を経て，小さな破片へと変換される．各段階の破壊は衝突時間 $t_{\rm col}$ で進行し，天体はより小さな破片に変換される．定常

状態にある衝突カスケードでは，小さい破片への質量の流れはサイズに依らず一定となる．質量の流れが一定の要請からサイズ分布に制限が付く．

各天体サイズにおける小さいサイズへの質量変換率を見積もろう．(単位体積当たりの) 個数サイズ分布を $n(R)$ と書くと，半径 $R \sim R+\Delta R$ の範囲の天体の (単位体積当たりの) 個数は $n(R)\Delta R$ で，それらの総質量は $mn(R)\Delta R$ で与えられる．

各サイズにおいて，サイズ比が等しい衝突では同程度の破壊が起こると仮定する．そのような自己相似的な衝突破壊が実現されていれば，衝突 1 回当たりの小さいサイズへの平均的な質量移動量は衝突天体の質量に比例し，その比例定数はサイズによらず一定となる．

自己相似的な衝突破壊を仮定すると，各サイズの天体は衝突時間 $t_{\rm col}$ くらいで，小さいサイズへ変換されるので，質量変換率 (または質量の流れ) は

$$mn(R)\Delta R/t_{\rm col} \tag{8.12}$$

とおおよそ見積ることができる．この衝突時間 $t_{\rm col}$ は

$$t_{\rm col} = (n(R)\Delta R\sigma v_{\rm imp})^{-1} \tag{8.13}$$

で与えられる．さらに衝突断面積 σ は $\sim R^2$ であり，また衝突速度 $v_{\rm imp}$ はサイズに依らないと仮定すると

$$t_{\rm col} \propto (n(R)\Delta RR^2)^{-1} \tag{8.14}$$

というサイズ依存性をもつ．これを (8.12) 式に代入し，$\Delta R \sim R$ とすると，結局質量変換率は $R^7 n(R)^2$ に比例することがわかる．従って，質量変換率 (質量の流れ) が R に依存しないので，定常は自己相似的な衝突カスケードの天体サイズ分布は

$$n(R) \propto R^{-3.5} \tag{8.15}$$

というべき分布となる (Dohnanyi 1969, Tanaka et al. 1996)．これは小惑星やカイパーベルトより少し急な傾きとなっている．また，各サイズでの衝突時間は $R^{1/2}$ に比例し，衝突カスケードの上流ほど衝突時間が長い．そのため衝突カスケードの寿命は大きな天体の破壊で決まる．

(b) 現実的な天体衝突における衝突カスケード

§8.1 で見たように、衝突破壊による放出質量は脱出速度に依存していて，衝突速度が一定である場合，ターゲット天体が小さいほど，サイズ比が等しい衝突ではより激しい破壊が起こり，ターゲット質量に対する放出質量の割合は大きくなる．また $M_{\rm eject} = m_{\rm tar}/2$ という大規模破壊は一定の質量比で起こるのではなくそのような衝突での質量比 $m^*_{\rm imp}/m_{\rm tar}$ は (8.4) 式より $v_{\rm esc}^{3\mu}$ に比例する．従って，実際の天体衝突は (a) で仮定したような自己相似的なものではない[9]．

このような現実的な天体衝突の場合でも，サイズ分布を解析的に求めることができる．各サイズの間で同じ質量比の衝突を比べるのでなく，$(v_{\rm esc}/v_{\rm imp})^{3\mu}$ に比例する質量比の衝突を比べることにすれば，各サイズの間で同様な破壊が起こり実質的に自己相似性が成り立つ．

各サイズでこのような別のサイズ比の衝突に着目する場合，サイズ比 $R_{\rm imp}/R_{\rm tar}$ を考慮して衝突時間を見積もる必要がある．実際，衝突時間は impactor の個数と target の断面積で決まるので

$$t_{\rm col} \propto (n(R_{\rm imp})R_{\rm imp}R_{\rm tar}^2)^{-1} \tag{8.16}$$

のように比例する．さらに $n(R) \propto R^{-\alpha}$ とし，$R_{\rm imp}/R_{\rm tar} \propto (m_{\rm imp}/m_{\rm tar})^{1/3} \propto v_{\rm esc}^{\mu} \propto R_{\rm tar}^{\mu}$ を用いると

$$t_{\rm col} \propto R_{\rm imp}^{\alpha-1}R_{\rm tar}^{-2} \propto (R_{\rm imp}/R_{\rm tar})^{\alpha-1}R_{\rm tar}^{\alpha-1-2} \propto R_{\rm tar}^{(1+\mu)(\alpha-1)-2} \tag{8.17}$$

[9] これに対し，強度支配の場合は強度にサイズ依存がなければ自己相似的な破壊となる

というターゲット半径依存性を得る．これを (8.12) 式に代入すると質量変換率は $R_{\rm tar}^{5-(2+\mu)(\alpha-1)}$ に比例することがわかる．これが $R_{\rm tar}$ の依存性を持たないことから，サイズ分布のべき指数は

$$\alpha = \frac{7+\mu}{2+\mu} \tag{8.18}$$

と求まる (O'Brien & Greenberg 2003, Kobayashi & Tanaka 2010).「砂」の場合 $\mu = 0.42$ で $\alpha = 3.07$ となり，また「岩」の場合は $\mu = 0.55$ で $\alpha = 2.96$ となり，どちらの場合も小惑星やカイパーベルト天体のサイズ分布の観測値に近い．また，衝突時間は $t_{\rm col} \propto R_{\rm tar}^{(1+3\mu)/(2+\mu)}$ という依存性をもち，やはり大きい天体ほど衝突時間（または破壊までの寿命）が長い．

9　ガス捕獲と木星型惑星形成

9.1　木星型惑星の形成シナリオ

(a) 惑星が大気を持つための条件

$$c^2 < \frac{GM}{r_M} \sim v_{\rm esc}^2 \tag{9.1}$$

300K では, 月 ($\sim 10^{25}$g) 以上の天体がこの条件を満たし大気を持つ．

(b) ガス捕獲の開始

- 大気質量の惑星質量に対する比は惑星質量とともに増加.

  大気質量 $\sim$ 固体コア質量となったとき，　大気が自己重力不安定となる．
  (Mizuno 不安定と呼ばれる．Mizuno et al. (1978) は大気静水圧解の消失を示した.)
  その後大気の重力収縮 (Kelvin-Helmholtz 収縮）が起こり，惑星への円盤ガス降着開始.

- 臨界コア質量：大気が重力不安定となる固体コア質量.
  - 微惑星集積による表面加熱や大気の大きな opacity は大気を安定化.
    そのため臨界コア質量は微惑星集積率や大気 opacity（ダスト量）とともに増大.
  - 臨界コア質量は地球質量の 5-20 倍 (Mizuno 1978; Stevenson 1982; Ikoma et al. 2000).

(c) ガス捕獲の停止時期と木星型惑星の最終質量がどのように決まるかは，現在も議論中.

- 説 1：惑星付近 ($\Delta R \sim 10 r_{\rm H}$) のガスを捕獲した時点.
  問題点：ガス円盤降着により円盤外側からガスが供給される．
- 説 2：惑星が付近のガスを強く跳ね飛ばし,「深い円盤 gap」を形成する質量に成長した時点．(条件式 $r_{\rm H} > c/\Omega$)
  問題点：円盤 gap はガス捕獲を停止させるほどの真空にならない（Kanagawa et al. 2015, Tanigawa & Tanaka 2016).
- 説 3: ガス円盤が消失した時点.
  ガス円盤の消失メカニズムは，惑星または中心星への降着や，磁気円盤風，中心星輻射による円盤光蒸発.

9.2 木星型惑星形成のための臨界コア質量の見積り

Stevenson (1982) による近似的な見積りを紹介する.

(a) 大気に対する仮定

- 輻射大気（対流なし），オパシティー κ は一定
- コアへの微惑星集積が加熱源.
  それによるルミノシティーは $L = GM_c\dot{M}_c/r_c$ 　(M_c, r_c はコア質量とコア半径).

(b) 基礎方程式

静水圧方程式
$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}, \tag{9.2}$$

輻射大気の温度分布
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{16\sigma T^3}\frac{L}{4\pi r^2}, \tag{9.3}$$

状態方程式
$$\frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu m_{\mathrm{H}}}. \tag{9.4}$$

(c) 大気温度・密度構造の近似解と大気質量

(9.2) 式で $M(r)$ を惑星全質量 M_p $(= M_c + M_{\mathrm{env}})$ で置きかえると近似し．その (9.2) 式で (9.3) 式を割ると，次式を得る[10].

$$\frac{dT^4}{dP} = \frac{3\kappa L}{16\pi\sigma GM_p} \equiv A \quad (\text{定数}). \tag{9.5}$$

これを積分して, $r \to \infty$ で円盤の温度 T_{disk}, 圧力 P_{disk} に接続し，$T \gg T_{\mathrm{disk}}$, $P \gg P_{\mathrm{disk}}$ と仮定して，$T^4 = AP$ を得る．さらに状態方程式 (9.4) を用いて，$\rho = \mu m_{\mathrm{H}} T^3/(kA)$ も得る．後者の式を (9.3) 式に代入し積分すると，大気の温度分布と密度分布の表式を得る.

$$T(r) = \frac{\mu m_{\mathrm{H}} GM_p}{4kr}, \qquad \rho(r) = \left(\frac{\mu m_{\mathrm{H}} GM_p}{k}\right)^4 \frac{\pi\sigma}{12\kappa L r^3}. \tag{9.6}$$

密度分布より，大気質量 M_{env} を次式のように得る.

$$M_{\mathrm{env}} = \int_{r_c}^{r_B} \rho(r) 4\pi r^2 dr \;=\; \left(\frac{\mu m_{\mathrm{H}} GM_p}{k}\right)^4 \frac{\pi^2\sigma}{3\kappa L} \ln\left(\frac{r_B}{r_c}\right) \qquad \propto M_p^4. \tag{9.7}$$

ここで，大気上端半径として惑星の Bondi 半径 r_B $(= GM_p/c^2)$ を採用した.

(d) 臨界コア質量

大気質量が全質量 M_p の関数として与えられたので，固体コア質量

$$M_c = M_p - M_{\mathrm{env}}(M_p) \tag{9.8}$$

も M_p の関数である．(9.7) 式より大気質量は M_p の増加により急激に増大するため，(9.8) 式のコア質量はある M_p で最大値をとる．この最大値が臨界コア質量 $M_{\mathrm{c,crit}}$ である．(9.8) 式を M_p で微分すると，コア質量が臨界コア質量であるとき，左辺 $= dM_c/dM_p = 0$ であ

[10] (9.5) 式の中辺が一定という仮定より状態方程式は $n = 3$ のポリトロープ ($P = K\rho^{4/3}$) となる．この仮定は恒星内部構造に対するおおよその近似としてよく用いられ，これに基づきエディントンの恒星標準モデルが作成されている.

り，また $M_{\rm env} \propto M_p^4$ で右辺 $= 1 - 4M_{\rm env}/M_p$ となるので，臨界コア質量に対応する全質量 $M_{\rm p,crit}$ と大気質量 $M_{\rm env,crit}$ に対する関係式

$$M_{\rm env,crit} = \frac{1}{4}M_{\rm p,crit} = \frac{1}{3}M_{\rm c,crit} \tag{9.9}$$

を得る．これを (9.7) 式に代入し，最終的に臨界コア質量 $M_{\rm c,crit}$ は次式のように求まる．

$$\begin{aligned} M_{\rm c,crit} &= \left[\left(\frac{3k}{4\mu m_{\rm H}G}\right)^4 \frac{\kappa G(4\pi\rho_c/3)^{1/3}}{\pi^2\sigma\ln(r_B/r_c)}\left(\frac{\dot{M}_c}{M_c}\right)\right]^{3/4} \\ &\simeq 4.6\left(\frac{\mu}{2.3}\right)^{-3}\left(\frac{\kappa}{0.01{\rm cm}^2/{\rm g}}\right)^{3/4}\left(\frac{\rho_c}{2{\rm g/cm}^3}\right)^{1/4}\left(\frac{M_c/\dot{M}_c}{5{\rm Myr}}\right)^{-3/4} M_\oplus. \end{aligned} \tag{9.10}$$

ここでの見積りで $\ln(r_B/r_c) \simeq 5$ とした．また，用いた吸収係数の典型値 ($\kappa = 0.01{\rm cm}^2/{\rm g}$) は星間ガスの値に比べ 2 桁ほど小さい．原始惑星系円盤や惑星大気におけるダスト成長や微惑星形成によるダストの消費によって，吸収係数はこの程度減少していると考えられる．

課題 7: (9.5), (9.6), (9.10) 式をそれぞれ導出せよ．

10 惑星形成論における主要課題

(a) 微惑星形成の問題

- ダストが中心星へ落下する前に微惑星は形成されるか？
- 微惑星形成は重力不安定で起こる？またはダスト成長で？
- ダスト成長や微惑星形成を原始惑星系円盤の観測から制約・解明することはできるか？

(b) 惑星落下の問題

- ガス円盤との重力相互作用による惑星落下は止められるか？$\Rightarrow$ gap 形成が鍵．
- 系外惑星の形成論：ホットジュピターには惑星落下・移動が必要と考えられている．
太陽系と系外惑星の統一的形成理論が必要
- 巨大ガス惑星のガス捕獲開始の時期．また，ガス捕獲による巨大惑星の成長はどの程度の速さで進行し，いつ止まるか？

(c) 微惑星破壊の問題

原始惑星のまわりの微惑星は高速で衝突し破壊される．小さな破片はガス抵抗で中心星へ急速に落下し，固体面密度は低下．

(d) 太陽系惑星と系外惑星の違い

太陽系惑星とそれと異なった系外惑星（ホットジュピターやエキセントリックプラネット）はどのような原因、メカニズムによって作り分けされたのか？

(e) 太陽系始原的小天体の諸問題

- **彗星、オールト雲の起源**
  オールト雲は彗星の巣であり，木星等の摂動でつくられた．木星と土星の形成時に摂動を受けた微惑星のうち、太陽系外へ放出されたものとオールト雲に留まったものの割合は？オールト雲形成のため必要な微惑星の量は地球質量の何倍か？
- **コンドライト隕石の起源**
  始原的なコンドライト隕石に普遍的に含まれるコンドリュールは，ミリサイズの球形の岩石粒子である．宇宙空間で 1500K 程度に加熱され融解し，球形になったと考えられている．またコンドリュールの生成期間は 2 百万年と長期間．そのような長期間にわたる高温現象は原始惑星系円盤のどこでいつどのように起きたのか？その惑星形成過程における位置づけは？