

# 惑星形成論の基礎

## Contents

|          |                                     |           |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>分子雲の重力収縮と Jeans 安定性解析</b>        | <b>2</b>  |
| 1.1      | 基礎方程式                               | 2         |
| 1.2      | 線形摂動と安定性解析                          | 2         |
| 1.3      | 分子雲の重力収縮への応用                        | 3         |
| <b>2</b> | <b>原始惑星系円盤の構造と自己重力不安定性</b>          | <b>4</b>  |
| 2.1      | 基礎方程式 (円筒座標系)                       | 4         |
| 2.2      | 円盤の鉛直静水圧構造                          | 4         |
| 2.3      | 線形摂動の WKB 近似解と円盤自己重力不安定性            | 5         |
| 2.4      | 原始惑星系円盤の林モデルとその自己重力安定性              | 7         |
| <b>3</b> | <b>降着円盤の進化と構造</b>                   | <b>9</b>  |
| 3.1      | 2次元粘性降着円盤の進化方程式                     | 9         |
| 3.2      | 定常解                                 | 10        |
| 3.3      | 自己相似解                               | 10        |
| 3.4      | 粘性加熱で決まる円盤温度                        | 11        |
| 3.5      | 円盤の散逸                               | 12        |
| 3.6      | Appendix 粘性降着円盤自己相似解の導出             | 12        |
| <b>4</b> | <b>ダストの運動と成長</b>                    | <b>15</b> |
| 4.1      | ダストの運動                              | 15        |
| 4.2      | ダスト成長と沈殿                            | 16        |
| 4.3      | ダスト付着の力学                            | 17        |
| <b>5</b> | <b>微惑星形成</b>                        | <b>18</b> |
| 5.1      | 微惑星質量の古典的な見積り                       | 18        |
| 5.2      | 微惑星形成の問題点                           | 18        |
| <b>6</b> | <b>重力多体系としての微惑星円盤</b>               | <b>20</b> |
| 6.1      | 重力2体問題 (復習)                         | 20        |
| 6.2      | 重力多体系における緩和                         | 21        |
| 6.2.1    | 緩和過程の概要                             | 21        |
| 6.2.2    | 2体重力緩和による力学的摩擦 (dynamical friction) | 21        |
| 6.2.3    | 2体重力緩和による緩和時間                       | 24        |
| 6.3      | 微惑星円盤における重力緩和                       | 24        |
| 6.3.1    | 円盤系の特徴                              | 24        |
| 6.3.2    | 3体問題の基礎方程式: ヒル方程式                   | 25        |
| 6.3.3    | 微惑星の粘性加熱と平衡速度                       | 26        |
| <b>7</b> | <b>惑星集積過程</b>                       | <b>28</b> |
| 7.1      | 惑星集積時間の簡単な見積り                       | 28        |
| 7.2      | 惑星集積の現代的モデル                         | 28        |
| 7.2.1    | 暴走成長 (runaway growth)               | 28        |

|           |                                     |           |
|-----------|-------------------------------------|-----------|
| 7.2.2     | 寡占的成長 (oligarchic growth) . . . . . | 29        |
| 7.2.3     | 巨大衝突 (giant impact) . . . . .       | 30        |
| 7.2.4     | 小石集積 (pebble accretion) . . . . .   | 31        |
| <b>8</b>  | <b>微惑星の衝突破壊</b> . . . . .           | <b>32</b> |
| 8.1       | 天体衝突破壊のスケーリング則 . . . . .            | 32        |
| 8.2       | 惑星形成時の微惑星の破壊条件 . . . . .            | 33        |
| 8.3       | 衝突破壊でつくられる天体サイズ分布 . . . . .         | 34        |
| <b>9</b>  | <b>ガス捕獲と木星型惑星形成</b> . . . . .       | <b>36</b> |
| 9.1       | 木星型惑星の形成シナリオ . . . . .              | 36        |
| 9.2       | 木星型惑星形成のための臨界コア質量の見積り . . . . .     | 36        |
| <b>10</b> | <b>惑星形成論における主要課題</b> . . . . .      | <b>38</b> |

## 1 分子雲の重力収縮と Jeans 安定性解析

分子雲の自己重力収縮を念頭において、空間一様なガスが自己重力によって分裂するための条件を調べる：一様ガスの自己重力安定性解析

### 1.1 基礎方程式

自己重力流体の方程式. 熱輸送, 粘性, 回転, 磁場などは無視.

- 連続の式, Eq. of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

- オイラー方程式, Euler's eq.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi. \quad (1.2)$$

- ポアソン方程式, Poisson's eq.

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.3)$$

### 1.2 線形摂動と安定性解析

もとの状態 (非摂動状態) として、静止した密度、温度が一様なガスを考える。一様等方性より非摂動状態で自己重力は働かないと仮定する<sup>1</sup>。 ( $\rho_0 = p_0 = \text{const.}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \Phi_0 = 0$ .)

(a) 摂動量:  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ,  $p = p_0 + p_1$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ ,  $\Phi = \Phi_1$ .

(b) 摂動方程式 (摂動量の 2 次以上の項は無視)

<sup>1</sup>非摂動状態に対する重力平衡の仮定は厳密には正しくない。しかしながら、他の効果が働くより現実的な平衡状態における自己重力不安定性を理解する上で、単純なジーンズの不安定性の結果は役に立つ。

- Eq. of continuity

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (1.4)$$

- Euler's eq.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1. \quad (1.5)$$

- Poisson's eq.

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (1.6)$$

- Eq. of state

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_1 = c_s^2 \rho_1. \quad (1.7)$$

(c) 線形解

$[\frac{\partial}{\partial t} (1.4) \text{ 式} - \rho_0 \nabla \cdot (1.5) \text{ 式}]$  に, (1.6) 式を代入して

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 - c_s^2 \Delta \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0. \quad (1.8)$$

この方程式の解を次の形におく.

$$\rho_1 = C \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t).$$

これより, 次の分散関係を得る

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.9)$$

$\omega$  が実数ならば安定, 虚数ならば不安定なので

$$k < k_J \equiv \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s} \quad \rightarrow \quad \text{不安定} \quad (1.10)$$

- Jeans length  $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}} \quad (\text{収縮時間: } \frac{\lambda_J}{c_s} \sim \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}})$
- Jeans mass  $M_J \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_0 (\lambda_J/2)^3$

### 1.3 分子雲の重力収縮への応用

分子雲 (Molecular Cloud), 例: Orion[1500 光年], Taurus[450 光年]

密度: 水素原子  $100\text{-}10^4 \text{ } \text{cm}^{-3} \sim 10^{-22}\text{-}10^{-21} \text{ g/cm}^3$ .

大きさ: 数十-数百光年.

質量:  $10^4\text{-}10^7 M_\odot$  ( $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{ g}$ ).

温度: 10-30K (音速: 200-300m/sec).

- Jeans length  $\lambda_J \sim 10^{19} \text{ cm} \sim 10 \text{ 光年}$ .
- Jeans mass  $M_J \sim \text{数 } 10 M_\odot$
- 重力収縮の定性的進化  
 $\lambda_J, M_J \propto \rho^{-1/2}$  (等温)

→ 収縮が進むにつれて短い波長のモードの発達が可能.

## 2 原始惑星系円盤の構造と自己重力不安定性

原始惑星系円盤：若い星の周りを回るガス円盤．惑星形成の場．

- 降着円盤 (accretion disk)
- passive disk (主に中心星輻射で加熱) ( $\leftrightarrow$  active disk)

ここでは，ガス円盤の局所自己重力不安定性を調べる．

### 2.1 基礎方程式 (円筒座標系)

$$\text{面密度 } \Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz, \quad 2 \text{次元圧力 } P = \int_{-\infty}^{\infty} p dz; \quad v_z = 0, \quad \partial v / \partial z \sim 0$$

- Eq. of continuity

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Sigma v_\phi) = 0 \quad (2.1)$$

- Euler's eq.

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial R} - \frac{GM_\odot}{R^2} - \frac{\partial \Phi_D}{\partial R} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\phi}{R} = -\frac{1}{R \Sigma} \frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_D}{\partial \phi} \quad (2.3)$$

- Poisson's eq.

$$\Delta \Phi_D = 4\pi G \Sigma \delta(z) \quad (2.4)$$

### 2.2 円盤の鉛直静水圧構造

- 薄い円盤に対し，鉛直方向の静水圧方程式はオイラー方程式の  $z$  成分より

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\Omega'^2 z \quad (2.5)$$

と書ける．ここで，鉛直方向の角振動数  $\Omega'$  は次式で定義される．

$$\Omega'^2 = \frac{GM_c}{R^3} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial z^2} (z=0). \quad (2.6)$$

円盤重力が無視できる場合， $\Omega'$  はケプラー角速度  $(GM_c/R^3)^{1/2}$  に等しい．

- 円盤密度の鉛直分布は，静水圧方程式 (2.5) を解くことで得ることができる．鉛直方向に等温の場合は

$$\rho(z) = \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi}h} e^{-z^2/2h^2} \quad (2.7)$$

となる．鉛直方向のスケールハイト  $h$  は次式で与えられる．

$$h = \frac{c_s}{\Omega'}. \quad (2.8)$$

このとき音速  $c_s$  は  $\gamma = 1$  の等温音速である．ポリトロップの場合は

$$\rho(z) = \rho(0) \left( 1 - \frac{(\gamma-1)z^2}{2h^2} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.9)$$

となる．この場合も  $h$  は (2.8) 式で与えられるが，音速には  $z=0$  での値が用いられる．

### 2.3 線形摂動の WKB 近似解と円盤自己重力不安定性

(a) 摂動量： $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1$ ,  $P = P_0 + P_1$ ,  $P_1 = c_s^2 \Sigma_1$ ;  
 $v_R = v_{R,1}$ ,  $v_\phi = R\Omega(R) + v_{\phi,1}$ ;  $\Phi_D = \Phi_{D,0} + \Phi_{D,1}$

非摂動状態としての円盤回転角速度  $\Omega$  は、遠心力と重力、圧力の釣り合いより

$$\Omega^2 = \frac{GM_c}{R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_{D,0}}{\partial R}(z=0) + \frac{1}{R} \frac{\partial H_0}{\partial R} \quad (2.10)$$

で与えられる。ここで、 $H_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 / \Sigma_0$  は非摂動のエンタルピーである。回転角速度  $\Omega$  は一般に  $R$  に依存する。ケプラー回転では  $\Omega \propto R^{-3/2}$ 、銀河円盤では  $\Omega \propto 1/R$  である。 $\Omega$  が  $R$  に依存する回転は差動回転、依存しない回転は剛体回転と呼ばれる。

(b) 摂動に対する WKB 近似  $\frac{\partial}{\partial R} \gg \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{1}{R}$ ; 摂動量  $\propto \exp(ikR + im\phi - i\omega t)$

(c) Poisson's eq. の積分

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_{D,1} = 4\pi G \Sigma_1 \delta(z) \quad (\because \text{WKB 近似}) \quad (2.11)$$

-0 から +0 まで  $z$  積分し、上下対称性を考慮すると

$$\left( \frac{\partial \Phi_{D,1}}{\partial z} \right)_{z=+0} = - \left( \frac{\partial \Phi_{D,1}}{\partial z} \right)_{z=-0} = 2\pi G \Sigma_1. \quad (2.12)$$

また、 $z \neq 0$  では、 $\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_{D,1} = 0$  なので

$$\Phi_{D,1} \propto e^{-k|z|} \exp(ikR + im\phi - i\omega t). \quad (2.13)$$

よって、(2.12), (2.13) 式より  $z=0$  において

$$\Phi_{D,1} = -2\pi G \Sigma_1 / k. \quad (2.14)$$

(d) その他の摂動方程式と分散関係

- Eq. of continuity

$$i(m\Omega - \omega)\Sigma_1 + ik\Sigma_0 v_{R,1} + \frac{im\Sigma_0}{R} v_{\phi,1} = 0. \quad (2.15)$$

- Euler's eq.

$$\begin{pmatrix} i(m\Omega - \omega) & -2\Omega \\ -2B & i(m\Omega - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{R,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik \\ -im/R \end{pmatrix} \left( \frac{c_s^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} + \Phi_{D,1} \right) \quad (2.16)$$

これを解いて、また WKB 近似を用いると

$$\begin{pmatrix} v_{R,1} \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (m\Omega - \omega)k \\ -i2Bk \end{pmatrix} \left( \frac{c_s^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} + \Phi_{D,1} \right) \quad (2.17)$$

但し

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2R} \frac{d(R^2\Omega)}{dR} && (\text{Oort's } B \text{ constant}), \\ \kappa^2 &= -4B\Omega && (\text{epicycle 振動数}), \\ \Delta &= \kappa^2 - (m\Omega - \omega)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

結局, 連立方程式 (2.14), (2.15), (2.17) より

$$\left(1 + \frac{c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k}{\Delta}\right) \Sigma_1 = 0. \quad (2.19)$$

または, 次の分散関係を得る

$$(m\Omega - \omega)^2 = c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k + \kappa^2. \quad (2.20)$$

(e) 安定条件

$\omega$  が実ならば摂動は安定である. そのためには, 分散関係の右辺がすべての  $k$  に対し正である必要がある. すなわち, 「 $\kappa^2 > 0$ 」と「右辺=0 の判別式が負」の2つが安定条件となる. 前者は, 比角運動量  $R^2\Omega$  が  $R$  とともに増大することを要請し, 回転流に対する Rayleigh の安定条件と呼ばれるものである. 後者からは, Toomre の安定条件

$$Q \equiv \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} > 1 \quad (2.21)$$

を得る.  $Q$  は Toomre's  $Q$  value と呼ばれる. また,  $Q=1$  における臨界不安定波長は

$$\lambda_{\text{crit}} = 2\pi/k_{\text{crit}} = 2\pi c_s/\kappa.$$

臨界不安定波長が円盤の厚さ  $c_s/\Omega'$  と同程度であるので, 無限に薄いという2次元円盤の近似については検討の余地がある. 角速度一定の円盤に対し円盤厚みを考慮した3次元円盤の自己重力不安定性解析の結果によると, Toomre の安定条件 (2.21) の右辺のしきい値が30%程度下がると見積もられている (Goldreich & Linden-Bell 1965). しかしながら, 上記の WKB 近似で無視された非軸対称の  $m=2$  の摂動が  $Q \simeq 2$  でも不安定となり励起されることが分かっている (Vauterin & Dejonghe 1996).

(f) Rayleigh の安定条件の粒子的描像に基づいた導出

回転流体の Rayleigh の安定条件  $dR^2\Omega/dR > 0$  は, 以下のように粒子的描像に基づいて理解することができる. 中心力場  $\Phi$  を運動する単位質量の粒子のエネルギーは  $\Omega = \dot{\theta}$  として

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}R^2\Omega^2 + \Phi \quad (2.22)$$

と書ける. この粒子を回転円盤内の1つの流体粒子と考え,  $\Omega$  は円盤の回転角速度, 中心力場  $\Phi$  は回転の遠心力と釣り合う求心力に対応するとすれば, (2.22) 式の粒子的モデルにより回転円盤の力学を近似的に表すことができる. 中心力場中の粒子の運動を復習しよう. (2.22) 式を比角運動量  $j = R^2\Omega$  を用いて書き換えると

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + U_{\text{eff}}(R) \quad (2.23)$$

ここで有効ポテンシャル  $U_{\text{eff}}(R)$  は次式で与えられる.

$$U_{\text{eff}}(R) = \Phi(R) + \frac{j^2}{2R^2}. \quad (2.24)$$

今, 粒子は  $R = R_0$  で円運動をしているとする. 中心力と遠心力が釣り合っているので

$$-\frac{dU_{\text{eff}}}{dR} = -\frac{d\Phi}{dR} + \frac{j^2}{R^3} = 0 \quad (\text{for } R = R_0). \quad (2.25)$$

この粒子が動径方向にも微小運動をしているとする。動径方向の運動方程式は

$$\ddot{R} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dR} = -\frac{d^2U_{\text{eff}}}{dR^2}(R - R_0) \quad (2.26)$$

となる。2つ目の等号では、 $R = R_0$  のまわりでテーラー展開をし、(2.25)式を用いた。 $d^2U_{\text{eff}}/dR^2 > 0$  である場合 ( $U_{\text{eff}}$  が下に凸の場合)、(2.26)式の解は  $R = R_0$  のまわりの単振動となり、粒子の円運動は動径方向の摂動に対し安定であることがわかる。逆に  $d^2U_{\text{eff}}/dR^2$  が負 ( $U_{\text{eff}}$  が上に凸) であれば不安定である。この安定条件を回転角速度  $\Omega$  で表そう。円盤各半径での中心力と遠心力との釣り合いより、 $R\Omega^2 = d\Phi/dR$  が成り立つので

$$\frac{d^2U_{\text{eff}}}{dR^2} = \frac{dR\Omega^2}{dR} + 3\Omega^2 = \frac{2\Omega}{R} \frac{dR^2\Omega}{dR} = \kappa^2. \quad (2.27)$$

と書くことができる。したがって、条件  $d^2U_{\text{eff}}/dR^2 > 0$  は Rayleigh の安定条件  $dR^2\Omega/dR > 0$  に等しい。また、epicycle 振動数  $\kappa$  は、動径方向の振動運動の角速度であることもわかる。

## 2.4 原始惑星系円盤の林モデルとその自己重力安定性

林モデル円盤 (最小質量円盤): 惑星形成における原始惑星系円盤の標準的モデル。

- 円盤温度 (passive disk [円盤内熱源なし] で、光学的に薄いことを仮定)  
ダスト温度は太陽からの輻射加熱と自身の放射冷却との釣り合いで決まり、ガス温度もこれに等しい。

$$\pi d^2 L_{\odot} / (4\pi R^2) = 4\pi d^2 \sigma T^4 \quad (2.28)$$

であり、温度と音速は次式で与えられる ( $L_{\odot} = 3.83 \times 10^{33} \text{erg/sec}$ )

$$T = 280(R/1\text{AU})^{-1/2} \text{K}, \quad (2.29)$$

$$c_s = 1.2(R/1\text{AU})^{-1/4} \text{km/sec}. \quad (2.30)$$

ガスの平均分子量を 2.3, 比熱比を 1.4 とした。

- 円盤面密度 (惑星形成のための必要最小限の質量)

$$\Sigma_{\text{gas}} = 1700(R/1\text{AU})^{-3/2} \text{g/cm}^2, \quad (2.31)$$

$$\Sigma_{\text{dust}} = \begin{cases} 7(R/1\text{AU})^{-3/2} \text{g/cm}^2 & (R < 2.7\text{AU}, \text{岩石}), \\ 28(R/1\text{AU})^{-3/2} \text{g/cm}^2 & (R > 2.7\text{AU}, \text{岩石+氷}). \end{cases} \quad (2.32)$$

- 円盤質量  $M_D = \int_0^{50\text{AU}} \Sigma 2\pi R dR$

ガス質量  $\simeq 0.017M_{\odot}$ , ダスト質量  $\simeq 2.3 \times 10^{-4}M_{\odot}$  (地球質量の約 80 倍)

- Toomre の Q 値

$$Q = 66(R/1\text{AU})^{-1/4} \quad (2.33)$$

よって、林モデルのガス円盤は自己重力不安定に対しては安定である。一方、より重い円盤で、かつ、円盤外側では、Q 値は小さくなり自己重力不安定になりうる。

- 原始惑星系円盤の鉛直構造

ガス円盤の厚さはスケールハイト  $h = c_s/\Omega$  で与えられる。ここで、 $c_s$  は  $\gamma = 1$  の等温音速である。円盤アスペクト比は  $h/R \simeq 1/30(R/1AU)^{1/4}$  である。

**参考書:**

Binney and Tremaine (1987) Galactic Dynamics, Chap. 5 & 6, Princeton Univ. Press.  
 渡邊・井田 (1997) 岩波講座地球惑星科学 12 巻 比較惑星学 第 2 章, 比較惑星形成論, 岩波書店.  
 Armitage (2010) Astrophysics of Planet Formation, Univ. Press Cambridge.

**課題 1:**

- 水素原子  $100 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 10K$  の分子雲に対し Jeans length と Jeans mass を求めよ。  
 ● 林モデル円盤 (分子量 2.3) の温度と音速の表式 (2.30), (2.30) を実際に求めよ。さらに (2.32) 式の面密度も用いて, Toomre の  $Q$  値を求めよ。(原始惑星系円盤では  $\kappa = \Omega$ .)
- (2.17) と (2.19) 式を導出せよ。
- ロッシュ限界 (半径)

$$R_{Roche} \simeq 2.4R_M(\rho_M/\rho_m)^{1/3} \quad (2.34)$$

( $R_M$ : 主星半径,  $\rho_M$ : 主星密度,  $\rho_m$ : 伴星密度) よりも遠くで主星を周回する伴星は, 潮汐破壊を自己重力で避けることができる。この条件式と Toomre の安定条件が類似していることを示せ。(ヒント: 主星の質量は  $M = \frac{4\pi}{3}\rho_M R_M^3$  である。また円盤の密度と面密度は  $\rho \sim \Sigma/h$  で関係づけられる.)

- 太陽近傍での銀河円盤の  $Q$  値: 銀河中心から 8kpc 離れた太陽近傍における恒星と星間ガスを合わせた密度は 0.1 太陽質量 /pc<sup>3</sup> 程度と見積られている。銀河円盤の面密度  $\Sigma$  はこの密度と厚さ  $h$  の積でおおよそ見積ることができる。銀河円盤の回転の速度を 200km/sec とし,  $\kappa = \Omega'$  と近似して, 太陽近傍での銀河円盤の  $Q$  値を見積れ。(太陽質量は  $2 \times 10^{30}\text{kg}$ , 1pc =  $3 \times 10^{16}\text{m}$ .) 見積りの結果  $Q \sim 1$  となる。これは, 銀河円盤の渦状構造が重力不安定によりつくられているとする説と調和的である。



### 3 降着円盤の進化と構造

- 降着円盤の進化：乱流粘性による角運動量と質量の輸送 (Lynden-Bell and Pringle 1974)
- 乱流粘性の  $\alpha$  モデル

$$\nu_t = \alpha c_s h.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} c_s &: \text{最大渦の速度} \\ \sqrt{\alpha} h &: \text{最大渦の大きさ} \\ \alpha \lesssim 0.01 & \text{ (Magneto-Rotational Instability 乱流)} \end{aligned}$$

#### 3.1 2次元粘性降着円盤の進化方程式

- 自己重力や外力としての磁場は考えない. 乱流粘性の  $\alpha$  モデルを採用.
- 分子雲コアからの円盤へのガスのふり積もり無視. 円盤風も無視.
- 回転角  $\phi$  方向に平均化 ( $\rightarrow$ 軸対称円盤).

- Eq. of continuity

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0. \quad (3.1)$$

(cf. Eq. [11])

- Navier-Stokes eq. (保存形) の  $\phi$  成分

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma v_\phi) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Sigma v_R v_\phi - R^2 \Pi_{R\phi}) = 0, \quad (3.2)$$

ここで,  $\Pi'_{R\phi}$  は粘性ストレステンソルの  $R, \phi$  成分で, 次式で与えられる.

$$\Pi'_{R\phi} = \Sigma \nu_t \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R} \right) = \Sigma \nu_t R \frac{d\Omega}{dR}. \quad (3.3)$$

$j = R v_\phi$  を用いると, 角運動量保存の式を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma j) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma j v_R - R^2 \Pi'_{R\phi}) = 0. \quad (3.4)$$

Eqs. (3.3), (3.4) より

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma j) + \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \underbrace{2\pi R \Sigma j v_R}_{\text{質量輸送に伴う角運動量流束}} \quad \underbrace{-2\pi R^3 \Sigma \nu_t \frac{d\Omega}{dR}}_{\text{差動回転円盤における粘性による角運動量流束}} \right) = 0. \quad (3.5)$$

(内側円盤から外側へのトルク)

- $\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ , (3.1), (3.5) 式より,  $v_R$  と質量降着率  $\dot{M}$  (円盤内側への質量流束) は以下となる.

$$\dot{M} \equiv -2\pi R \Sigma v_R = -\frac{2\pi}{(dj/dR)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^3 \Sigma \nu_t \frac{d\Omega}{dR} \right). \quad (3.6)$$

- これを Eq. (3.1) に代入すると, 面密度  $\Sigma$  に対する進化方程式を得る. (拡散方程式の1種)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{(dj/dR)} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^3 \Sigma \nu_t \frac{d\Omega}{dR} \right) \right] = 0. \quad (3.7)$$

### 3.2 定常解

$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0$  となる解を求める。ここでは内側に降着する円盤を考える。Eqs.(3.7), (3.5) より

$$\dot{\mathcal{M}} = (\text{正の}) \text{定数}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\mathcal{J}} \equiv j\dot{\mathcal{M}} + 2\pi R^3 \Sigma \nu_t \frac{d\Omega}{dR} = \text{定数}. \quad (3.9)$$

Eq. (3.9) より

$$\nu_t \Sigma = -\frac{j\dot{\mathcal{M}} - \dot{\mathcal{J}}}{2\pi R^3 (d\Omega/dR)}. \quad (3.10)$$

さらに内側境界条件として  $\Sigma(R_{\text{in}}) = 0$  を採用すると  $\dot{\mathcal{J}} = \dot{\mathcal{M}} j(R_{\text{in}}) (> 0)$  であるので

$$\nu_t \Sigma = -\frac{\dot{\mathcal{M}}}{2\pi R^3 (d\Omega/dR)} [j(R) - j(R_{\text{in}})]. \quad (3.11)$$

を得る。特に  $\Omega \propto R^{-3/2}$  (Kepler 回転) の場合には

$$\Sigma = \frac{\dot{\mathcal{M}}}{3\pi \nu_t} \left( 1 - \sqrt{\frac{R_{\text{in}}}{R}} \right). \quad (3.12)$$

### 3.3 自己相似解

円盤回転角速度が  $\Omega \propto R^{-\beta}$ , 乱流粘性が  $\nu_t = \nu_0 R^\gamma$  とそれぞれ  $R$  のべき関数である場合を考える (Kepler 回転円盤では  $\beta = 3/2$ , 林円盤温度で  $\alpha = \text{一定}$  の場合  $\gamma = 1$ ). このとき, 微分方程式 (3.7) は次のような自己相似解をもつ (Lynden-Bell & Pringle 1974; Hartmann et al. 1998; Appendix A も参照)

$$\Sigma(R, t) = \frac{|\dot{M}_d|}{2\pi \beta \nu} \exp \left[ -\left( \frac{R}{R_d(t)} \right)^{2-\gamma} \right]. \quad (3.13)$$

ここで, 円盤半径  $R_d(t)$  は

$$R_d(t) = \left[ \frac{\beta(2-\gamma)^2}{2-\beta} \nu_0 t \right]^{\frac{1}{2-\gamma}}. \quad (3.14)$$

で定義される。この自己相似解では円盤内縁半径に対し  $R_{\text{in}} \ll R, R_d$  が仮定されており,  $\dot{\mathcal{J}} \rightarrow 0$  で円盤の全角運動量  $J_d$  は保存する。  $R_{\text{in}} \ll R \ll R_d$  という半径  $R$  では, 自己相似解 (3.13) と定常降着円盤の解 (3.11) は一致する。さらに, 円盤質量  $M_d(t)$  とその時間微分は, 円盤角運動量  $J_d$  を用いて次式で与えられる。

$$M_d = \frac{J_d}{\Gamma(b) R_d^2 \Omega(R_d)} \propto t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}, \quad \dot{M}_d = -\frac{2-\beta}{2-\gamma} \frac{M_d}{t} \quad \left( b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1 \right). \quad (3.15)$$

ここで,  $\Gamma(b)$  はガンマ関数である。また, 質量降着率 (円盤内側への質量流束)  $\dot{\mathcal{M}}$  は

$$\dot{\mathcal{M}} = -2\pi R \Sigma \nu_R = 2\pi \beta \nu \Sigma \left[ 1 - \frac{2-\gamma}{2-\beta} \left( \frac{R}{R_d} \right)^{2-\gamma} \right]. \quad (3.16)$$

ガス円盤の進化時間は  $\gamma = 1, \beta = 3/2$  の場合

$$t_d \simeq \frac{R_d^2}{3\nu_t(R_d)} \simeq \frac{1}{3\alpha\Omega(R_d)} \left( \frac{R_d}{h} \right)^2. \quad (3.17)$$

と見積もられる。原始惑星系円盤で  $\alpha = 10^{-3}$  とすると, 円盤半径 100AU に対し ( $R_d/h \simeq 10$  で)  $t_d$  は 5 百万年程度となり円盤寿命の観測値とおおよそ合う。

### 3.4 粘性加熱で決まる円盤温度

- 粘性加熱率  $\epsilon$  (単位質量当たり) (e.g. ランダウリフシツ 「流体力学」)

$$\epsilon = \nu_t \left( R \frac{d\Omega}{dR} \right)^2. \quad (3.18)$$

- 表面温度

$$2\sigma T_s^4 = \Sigma \nu_t \left( R \frac{d\Omega}{dR} \right)^2. \quad (3.19)$$

$R \gg R_{in}$  で, 定常降着円盤を仮定すると

$$T_s = \left( \frac{1}{8\pi\sigma} \dot{M}_d R \frac{d\Omega^2}{dR} \right)^{1/4} \propto \Omega^{1/2} \propto R^{-3/4}. \quad (3.20)$$

林モデルのガス面密度で  $\alpha = 10^{-3}$  とすると, 1AU で  $T_s \simeq 100\text{K}$  となる.

- 中心面温度:

$z$  方向の温度構造を求める. 熱輸送は輻射によるものとし, 拡散近似が適用できるものとする. また, 乱流粘性による加熱源は円盤中心面に局在していると簡単化すると

$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz} \right) = \frac{1}{2} \nu_t \Sigma \left( R \frac{d\Omega}{dR} \right)^2 \delta(z). \quad (3.21)$$

さらに, 光学的厚さ  $\tau_z = \int_z^\infty \kappa\rho dz$  を導入すると, Eq. (3.21) は

$$\frac{4}{3} \frac{d}{d\tau_z} (\sigma T^4) = \frac{R\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega}{dR} \dot{M}_d. \quad (3.22)$$

境界条件として,  $\tau_z = 2/3$  で  $T = T_s$  とすると, 温度分布は次式のように得られる

$$T(z) = \left( \frac{3}{4}\tau_z + \frac{1}{2} \right)^{1/4} T_s. \quad (3.23)$$

**課題 2:** 質量  $M_*$  の中心星のまわりを Kepler 回転する定常降着円盤における円盤全体の粘性加熱率は, 重力エネルギーの解放によりまかなわれることから,  $1/2(GM_*/R_{in})\dot{M}_d$  で与えられると予想される. ここで, 円盤内縁  $R_{in}$  は円盤半径  $R_d$  に比べ十分小さいとした. この予想が成り立つことを, (3.18) 式を定常円盤の全質量に対して積分することにより確かめよ.

**課題 3:** 質量降着率  $\dot{M}_d = 3\pi\Sigma\nu$  が一定である定常降着円盤の回転エネルギーの収支を, リング領域 (半径  $r$ , 幅  $\Delta r$ ) のガスに対して考える. ここで,  $\Sigma$  は円盤面密度で,  $\nu$  は動粘性係数である. 円盤はケプラー回転をしているものとする.

1. このリング領域のガスに対し中心星重力がする仕事率は次式で与えられることを示せ. 但し, リング半径は円盤内縁半径より十分大きいとする.

$$\frac{GM_c}{r^2} \dot{M}_d \Delta r = r\Omega^2 \dot{M}_d \Delta r. \quad (3.24)$$

2. 降着円盤内の単位質量のガス塊が降着により  $v_R (< 0)$  で中心へ落下する際, その回転エネルギーは単位時間当たり  $v_R(dr^2\Omega^2/dr)/2$  だけ増加する. 上のリング領域のガスの回転エネルギーの増加率は (3.24) 式の半分であることを示せ.

3. 降着円盤では粘性により回転エネルギーが散逸し熱に変わる. 円盤単位面積当たりの粘性加熱率  $[J/m^2/s]$  は  $\Sigma\nu(rd\Omega/dr)^2$  で与えられる. 上のリング領域内の粘性散逸による回転エネルギーの消失率は (3.24) 式の 1.5 倍であることを示せ.
4. 上記より, 定常降着円盤において 1. の中心星重力がした仕事は 2. と 3. で消費されるが, 収支が合わない. この収支の差は何故か? 粘性による動径方向のエネルギー流束を考慮することで, これらの収支を辻褃が合うように説明せよ.

### 3.5 円盤の散逸

- 円盤散逸に対する観測的要請

- 円盤寿命  $\sim 10^6$ - $10^7$ yr.
- 散逸途中の円盤 (transition disk) が比較的少ないことから, 散逸は短期間 ( $\sim 10^5$ yr.)
- 粘性進化以外の散逸機構が必要  $\rightarrow$  “光蒸発 (photoevaporation)” が有望

- 光蒸発による円盤散逸

- 中心星等の FUV や EUV, X 線による円盤表面の加熱 ( $\sim 1$  万度) で流体力学的に散逸
- 光蒸発の臨界半径  $r_g$  の付近で起こる:

$$r_g = \frac{GM_*}{c_s^2} = 9 \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right) \left( \frac{c_s}{10\text{km/s}} \right)^{-2} \text{ AU}. \quad (3.25)$$

- 光蒸発による円盤消失率は  $\dot{M}_d = 10^{-9}$ - $10^{-7} M_\odot/\text{yr}$ . (FUV, EUV, X 線の強度に依存)

### 3.6 Appendix 粘性降着円盤自己相似解の導出

- (1) 次元解析による円盤各量の見積りと自己相似解

- 仮定

$$\nu(R) = \nu_0 R^\gamma, \quad \Omega(R) = \Omega_0 R^{-\beta} \quad (\text{ケプラー回転円盤では } \beta = 3/2). \quad (3.26)$$

- 円盤の特徴的な半径  $R_c$  (大部分の円盤質量を担う領域) は,  $R_c \sim [\nu(R_c)t]^{1/2}$  より

$$R_c \sim (\nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}}. \quad (3.27)$$

- 円盤降着速度の特徴的な値

$$v_{R,c} \sim R_c/t \sim \nu(R_c)/R_c. \quad (3.28)$$

- 円盤全角運動量の保存

$$J_d = \int_0^\infty j \Sigma 2\pi R dR = \text{const}. \quad (3.29)$$

- 円盤全質量  $M_d$

$$M_d = \int_0^\infty \Sigma 2\pi R dR \sim \frac{J_d}{j_c} \sim \frac{J_d}{R_c^2 \Omega(R_c)} \propto t^{-\frac{2-\beta}{2-\gamma}}. \quad (3.30)$$

- 円盤面密度の特徴的な値

$$\Sigma_c = \Sigma(R_c(t), t) \sim \frac{J_d}{j_c R_c^2} \sim \frac{J_d}{R_c^4 \Omega(R_c)} \propto t^{-\frac{4-\beta}{2-\gamma}}. \quad (3.31)$$

- 無次元変数  $y$

$$y = \frac{R^2}{\nu t} = \frac{R^{2-\gamma}}{\nu_0 t}. \quad (3.32)$$

- 円盤面密度分布の自己相似解

上の見積りは、円盤面密度などの空間分布が任意の時間において相似的であるような解（自己相似解）が存在することを示している。自己相似解はただ1つの無次元変数  $y$  の関数で表される。面密度の特徴的な値が (3.31) 式のように書かれることを考慮し、面密度の自己相似解を次の形に表す。

$$\Sigma(r, t) = \frac{J_d}{R^4 \Omega} f(y). \quad (3.33)$$

自己相似解  $f(y)$  は連続の式と角運動量保存の式から求まるが、以下ではより簡単な方法を紹介する。

## (2) 角運動量保存による自己相似解の積分

角運動量分布の積分形（積算分布）

$$J(R) = \int_0^R j \Sigma 2\pi R dR. \quad (3.34)$$

$R$  と  $y$  の関係式

$$R(y) = (y \nu_0 t)^{\frac{1}{2-\gamma}} \quad (3.35)$$

を用いて、積算分布を  $y$  の関数  $J(R(y))$  とすると、これは解の自己相似性より時間に依らない。

$$\frac{d}{dt} J(R(y)) = 0. \quad (3.36)$$

一方、左辺については、実際に  $J(R(y))$  の  $y = \text{一定}$  での時間微分を書き下すと

$$\frac{d}{dt} J(R(y)) = \int_0^{R(y)} \frac{\partial(j\Sigma)}{\partial t} 2\pi R dR + j\Sigma 2\pi R \frac{dR(y)}{dt}. \quad (3.37)$$

これが0に等しい。右辺第1項は角運動量保存の式 (3.5) を用いて容易に積分でき、第2項は (3.35) 式を用いて変形すると、結局速度  $v_R$  に対する次の表式を得る。

$$v_R = -\beta \frac{\nu}{R} \left[ 1 - \frac{y}{\beta(2-\gamma)} \right]. \quad (3.38)$$

また、円盤質量降着率  $\dot{M}_d(R)$  は

$$\dot{M}_d(R) \equiv -2\pi R \Sigma v_R = 2\pi \beta \nu \Sigma \left[ 1 - \frac{y}{\beta(2-\gamma)} \right]. \quad (3.39)$$

$y \ll 1$  では、定常降着円盤の  $\dot{M}_D$  (3.11 式) に一致する（但し、 $R \gg R_{in}$ ）。

(3) 関数  $f$  の方程式とその解

円盤質量降着率は (3.6) 式右辺のようにも書ける. (3.6) と (3.39) 式が等しいことから,  $f(y)$  の方程式

$$\frac{d \ln f}{dy} = -\frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} + \frac{b}{y} \quad \left( b = \frac{2-\beta}{2-\gamma} + 1 \right). \quad (3.40)$$

を得る. この微分方程式の解は, 新たな無次元変数

$$x = \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} y = \frac{2-\beta}{\beta(2-\gamma)^2} \frac{R^2}{\nu t} = \left( \frac{r}{R_d(t)} \right)^{2-\gamma} \quad (3.41)$$

( $R_d$  は [3.14] 式で定義されている) を用いて次のように書ける.

$$f = \frac{2-\gamma}{2\pi\Gamma(b)} x^b \exp(-x). \quad (3.42)$$

右辺の比例定数は円盤全角運動量の式 (3.29) を満たすように決めた. 以上より, 円盤の面密度と全質量, および両者の関係は次のようになる.

$$\Sigma(R, t) = \frac{(2-\gamma)L}{2\pi\Gamma(b)\Omega R^4} x^b \exp(-x), \quad (3.43)$$

$$M_d(t) = \int_0^\infty \Sigma 2\pi R dR = \frac{J_d}{\Gamma(b)\Omega(R_d)R_d^2}, \quad \Sigma(r, t) = \frac{|\dot{M}_d|}{2\pi\beta\nu} \exp(-x). \quad (3.44)$$

**課題 4 :** (3.38), (3.40), (3.42), (3.44) 式を導出せよ.

## 4 ダストの運動と成長

- ダストの初期状態は星間ダスト。サイズは 5nm-0.2 $\mu$ m に分布するが大部分の質量はサイズ分布上限が担う (Mathis et al. 1977)。シリケートコア+氷マントル。
- 原始惑星系円盤の乱流停止  $\rightarrow$  ダストの沈殿により円盤中心面にダスト層形成  $\rightarrow$  重力不安定により微惑星形成 (Goldreich and Ward 1973)。
- ダストが小さいと (ガス抵抗により) 沈殿しない  $\rightarrow$  ダストの成長が重要。

### 4.1 ダストの運動

#### (a) ガス抵抗則

- ガス抵抗力

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -mA(m)\rho_g\Delta\mathbf{v}. \quad (4.1)$$

ここで、係数  $A$  はダストの大きさにより以下の 2 通りの表式で与えられる：

- Stokes' law ( $a > 9l/4$ ,  $l(= 1/[n_{H_2}\sigma_{H_2}])$  : gas mean free path)

$$A = \frac{9v_{\text{th}}l}{4\rho_{\text{solid}}a^2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{9c_s l}{4\rho_{\text{solid}}a^2}. \quad (4.2)$$

$$\left( v_{\text{th}} = \sqrt{8/\pi}c_s, \quad \mathbf{F}_{\text{drag}} = -6\pi\nu a\rho_g\Delta\mathbf{v}, \quad \nu = v_{\text{th}}l/2. \right)$$

- Epstein's law ( $a < 9l/4$ )

$$A = \frac{v_{\text{th}}}{\rho_{\text{solid}}a} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{c_s}{\rho_{\text{solid}}a}. \quad (4.3)$$

- また一般に

$$A = \frac{3C_D\Delta v}{8\rho_{\text{solid}}a}. \quad (4.4)$$

- ガス抵抗による停止時間

$$t_{\text{stop}} = \frac{m\Delta v}{|\mathbf{F}_{\text{drag}}|} = \frac{1}{A\rho_g}, \quad \mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{m\Delta\mathbf{v}}{t_{\text{stop}}}. \quad (4.5)$$

#### (b) ガスとダストの運動方程式：定常、軸対称、自己重力無しを仮定

- ガス  $\mathbf{v} = (v_R, v_\phi = R\Omega + v_{\phi,1}, v_z)$ . ( $\Omega = \Omega_K \equiv \sqrt{GM_c/R^3}$  とする.)

(2.16) 式を参考にして

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ -2B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_R \\ v_{\phi,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial R} + \rho_d A (V_R - v_R) \\ \rho_d A (V_{\phi,1} - v_{\phi,1}) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

- ダスト  $\mathbf{V} = (V_R, V_\phi = R\Omega + V_{\phi,1}, V_z)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ -2B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ V_{\phi,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_g A (V_R - v_R) \\ -\rho_g A (V_{\phi,1} - v_{\phi,1}) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

(c) ガスに比べてダストの密度が小さい場合の解

• ガス

$$v_R = v_z = 0, \quad v_\phi = (1 - \eta)R\Omega, \quad (4.8)$$

$$\eta = -\frac{1}{2R\Omega^2\rho_g} \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{2} \left( \frac{c_s}{R\Omega} \right)^2 \frac{\partial \ln p}{\partial \ln R}. \quad (4.9)$$

• ダスト

$$V_R = -\frac{2t_{\text{stop}}\Omega}{1 + (t_{\text{stop}}\Omega)^2} \eta R\Omega, \quad (4.10)$$

$$V_\phi = R\Omega - \frac{1}{1 + (t_{\text{stop}}\Omega)^2} \eta R\Omega, \quad (4.11)$$

$$V_z = -\Omega z (t_{\text{stop}}\Omega). \quad (4.12)$$

## 4.2 ダスト成長と沈殿

(a) ダスト成長

$$\frac{dm}{dt} = \rho_d \sigma_{\text{col}} v. \quad (4.13)$$

ここで、断面積  $\sigma_{\text{col}}$  は  $4\pi a^2$ ,  $v$  は衝突相対速度でその大きさは沈殿速度  $V_z$  程度である。これより、ダストの成長時間は

$$t_{\text{grow}} = a / \frac{da}{dt} = 3m / \frac{dm}{dt} = \frac{3m\rho_g A}{4\pi a^2 \rho_d z \Omega^2} \sim \frac{\Sigma_g}{\Sigma_d} \Omega^{-1}. \quad (4.14)$$

ここで、 $z$  はダスト層の厚さとし、Epstein 則を用いた。この成長時間はダストサイズに依存しない。また、ダスト成長時間は円盤外側 ( $\sim 100\text{AU}$ ) でも数万年程度と見積もられ、ガス円盤の進化時間に比べ短時間でダストは成長することがわかる。

(b) ダストの沈殿

ダストの成長とともに沈殿速度は増加する。  $t_{\text{grow}} \sim h/|V_z(h)|$  となると沈殿が進行。円盤中心面にダスト層が形成されるまでに、  $\sim 10t_{\text{grow}}$  程度かかる。

(c) 乱流円盤におけるダスト層の厚さ

乱流円盤においてダスト層の厚さ  $h_d$  は、巻き上げ時間と沈殿時間のつりあい决定的

$$\frac{h_d^2}{\nu_t} \sim \frac{h_d}{|V_z(h_d)|}. \quad (4.15)$$

よって、  $\nu_t = \alpha c_s h$  として

$$h_d = \sqrt{\frac{\alpha}{t_{\text{stop}}\Omega}} h. \quad (4.16)$$

乱流円盤においても、ダスト成長時間は (4.14) 式で与えられる。

(d) ダストの中心星への落下

• ダストの成長とともにダスト落下速度  $V_R$  は加速。 (4.10) 式で  $t_{\text{stop}}\Omega_K \simeq 1$  とすると

$$|V_R| \simeq \eta R\Omega \simeq 50\text{m/sec}. \quad (4.17)$$



- 落下時間 ( $t_{\text{stop}}\Omega_K \simeq 1$  の場合)

$$t_{\text{drift}} = R/|V_R| \simeq \frac{1}{\eta\Omega} \simeq 100 \text{ 年} \quad (\text{at } 1\text{AU}). \quad (4.18)$$

#### 課題 5:

1. ガス抵抗則の Epstein's law (4.3) 式をおおよそ導け. (factor まで合わせなくてもよい)
2. ガスとダストの速度の式 (4.8)-(4.11) 式を導出せよ.

### 4.3 ダスト付着の力学

- 付着力は分子間力に起因: ファンデルワールス力 ( $< 0.01\text{eV}$ , 岩石), 水素結合 ( $\sim 0.1\text{eV}$ , 氷)
- 付着のエネルギーは, 巨視的な量である表面エネルギー  $\gamma$  [ $\text{J}/\text{m}^2$ ] で表される.

$$E_{\text{stick}} = -2\gamma\pi a^2 \quad (a \text{ は接触面半径}). \quad (4.19)$$

- 接触面半径

半径  $R$  の固体球 2 体の接触において, 接触面 (円) の半径  $a$  は次式で与えられる (JKR 理論)

$$a \simeq \left( \frac{14\gamma R^2}{\mathcal{E}} \right)^{1/3}. \quad (4.20)$$

ここで,  $\mathcal{E}$  はヤング率 [ $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ ]. 上式の大まかな導出を示す. 弾性エネルギーは

$$E_{\text{elastic}} \simeq \int (\text{応力}) \times \frac{du}{dx} dV \simeq \int \frac{1}{2}\mathcal{E} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dV \simeq 0.2\mathcal{E}a^5/R^2. \quad (4.21)$$

ここで,  $u$  は固体内部の変位で  $du/dx \sim \delta/a$ ,  $\delta$  は球表面の変位. さらに幾何学的関係  $\delta \sim a^2/R$  より上式は理解できる. エネルギーの和  $E_{\text{stick}} + E_{\text{elastic}}$  を最小にするように半径  $a$  が決まる.

- 付着による結合エネルギー

$$E_{\text{bond}} = |E_{\text{stick}} + E_{\text{elastic}}| \simeq 20 \left( \frac{\gamma^5 R^4}{\mathcal{E}^4} \right)^{1/3}. \quad (4.22)$$

- 付着のための限界速度

固体球粒子の質量を  $m$  とすると, 付着限界速度  $v_{\text{crit}}$  は

$$v_{\text{crit}} \sim \left( \frac{E_{\text{bond}}}{m} \right)^{1/2} \sim \begin{cases} 3(R/0.1\mu\text{m})^{-5/6} & \text{m/sec (氷)}, \\ 0.3(R/0.1\mu\text{m})^{-5/6} & \text{m/sec (岩石)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

(4.23) 式は大雑把な見積りである. 数値計算や室内実験による微粒子集合体衝突の研究によると, 付着限界速度は上の見積りより 1 桁位大きい.

|                           | 表面エネルギー $\gamma$ [J/m <sup>2</sup> ] | ヤング率 $\mathcal{E}$ [GPa] |
|---------------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| シリケート (SiO <sub>2</sub> ) | 0.03 (実効的な値)                         | 50                       |
| 氷                         | 0.1                                  | 7                        |

## 5 微惑星形成

### 5.1 微惑星質量の古典的な見積り

- ダスト沈澱による高密度ダスト層の形成と分裂 (Goldreich and Ward 1973)

ダスト層の密度  $\Sigma_d/h_d \simeq$  ロッシュ密度 ( $\sim \Omega^2/G$  [2.34 式]) を越えると、自己重力不安定で分裂し微惑星が形成される。

- 分裂条件を Toomre の  $Q$  値で表す。音速 (速度分散)  $c_s$  を  $h_d\Omega$  で置き換えると分裂条件は

$$Q \sim \frac{h_d\Omega^2}{\pi G\Sigma_d} \lesssim 1. \quad (5.1)$$

- ダスト層の臨界厚さ

$$h_{d,crit} \sim \frac{\pi G\Sigma_d}{\Omega^2} = \frac{\pi\Sigma_d R^3}{M_c}. \quad (5.2)$$

林モデル円盤 1AU では  $h_{d,crit}/R \sim 2 \times 10^{-6}$ . 特徴的な速度は  $h_{d,crit}\Omega \sim 7\text{cm/sec}$  と極めて小さい。

- 臨界波数と微惑星質量

$$k_{crit} \sim 1/h_{d,crit}. \quad (5.3)$$

$$m_{crit} \sim \pi(2\pi/k_{crit})^2\Sigma_d \sim 4\pi^5 \frac{R^6\Sigma_d^3}{M_c^2}. \quad (5.4)$$

林モデルガス円盤の 1AU では、 $m_{crit} \sim 10^{18}\text{g}$  と見積もられる。

### 5.2 微惑星形成の問題点

#### (a) シア不安定によるダストの巻き上げ

- ダスト層が高密度 ( $\rho_d \gtrsim \rho_g$ ) になると、上層のガスとの間に回転速度の差が生まれる

$$\Delta v_\phi \sim \eta R\Omega. \quad (5.5)$$

このためシア不安定による乱流が発生し、ダストを巻き上げる (Weidenschilling 1980).

- 巻き上げの高さは重力エネルギーと運動エネルギーのつり合いから見積もられる。

$$\frac{1}{2} \frac{GM_c}{R^3} z^2 \sim \frac{1}{2} (\eta R\Omega)^2. \quad (5.6)$$

$$z \sim \frac{c^2}{R\Omega^2} \sim \frac{h^2}{R}. \quad (5.7)$$

- 巻き上げ可能最大ダスト量

巻き上げられるダストの密度は最大で  $\rho_d \sim \rho_g$  まで大きくなる。  
よって、巻き上げ可能なダスト面密度の最大値  $\Sigma_{d,\max}$  は

$$\Sigma_{d,\max} \sim 2z\rho_g \sim \frac{h}{R}\Sigma_g. \quad (5.8)$$

$z/h \simeq 1/30$  であるので、 $\Sigma_{d,\max}$  は実際のダスト面密度  $\Sigma_d (\simeq \Sigma_g/100)$  よりも大きい。さらに、Sekiya (1998) による詳細な見積りでは、巻き上げの最大ダスト量は上記の見積りより 3 倍程度も大きい。よって、宇宙存在比のダスト量をもつ原始惑星系円盤では、ダストはすべて巻き上げられてしまい、沈殿を必要とする自己重力不安定による微惑星形成は難しい。

- 解決方法

- より大きなダスト面密度の実現

円盤全体でガスダスト存在比を変えるのは難しいが<sup>2</sup>、局在化させることでダスト面密度を局所的に増大させることは可能。例えば、ダスト落下が途中で遅くなれば、そこにダストが溜まりダスト存在量は上がる。内側ほど円盤ガス密度は高く  $t_{\text{stop}}\Omega$  が小さくなるため、ダストの落下速度減少と滞留を実現できるかもしれない (Youdin and Shu 2002)。しかし、ダストがさらに成長してしまうと落下速度は増加し滞留できない。別の機構として、ガス乱流の中でダストが吹きだまりに局在化することでダスト面密度が増大する可能性も検討されている。streaming instability はそのような機構の 1 つであるが、この不安定のためにも  $\Sigma_d \gtrsim \Sigma_{d,\max}$  が必要である。この他に、ダスト・ガスの混合流体における永年重力不安定性にてダストを濃集させる機構も提唱されている (Ward 2000, Youdin 2011)。しかし、この不安定が起こるためには乱流が非常に弱い ( $\alpha < 10^{-4}$ ) が必要である。

- 大きいダスト粒子への成長とガスからの decouple (分離) の実現

ダスト局在化のためにもある程度の decouple は必要 (streaming instability は  $t_{\text{stop}}\Omega \sim 0.1$  で起こりやすい.)。decouple するまで成長できるかが問題。

(b) ダストの中心星落下の問題

$t_{\text{stop}}\Omega \simeq 1$  の場合、落下速度  $\simeq 50\text{m/sec}$ 、落下時間  $\simeq 100$  年 (at 1AU)。

但し、これは成長時間 (4.14) と同程度であるので、成長が継続しガスと decouple して落下が減速すればそれほど問題でない。(成長停止ならば問題。)

(c) ダストの衝突破壊

(最大) 衝突速度は  $\eta R\Omega \simeq 50\text{m/sec}$  (時速 180km)。このような高速衝突で合体成長は可能であるか？

---

<sup>2</sup>円盤内のダストは中心星へ落下するので、ダストの存在量を円盤全体で減少させることは容易である。

## 6 重力多体系としての微惑星円盤

### 6.1 重力2体問題（復習）

2粒子（質量  $M, m$ ）の重力相互作用による相対運動を考える（換算質量  $(\mu = \frac{Mm}{M+m})$  の運動）。

- 運動方程式

$$r \text{ 成分: } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad (6.1)$$

$$\theta \text{ 成分: } r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0, \quad (6.2)$$

$$\text{但し, } \alpha = G(M+m). \quad (6.3)$$

- 運動の定数

- 角運動量（単位質量当たり）

$$L = r^2\dot{\theta}. \quad (6.4)$$

- エネルギー（単位質量当たり）

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (6.5)$$

- 楕円軌道 ( $e < 1$ )

- 直交座標表示

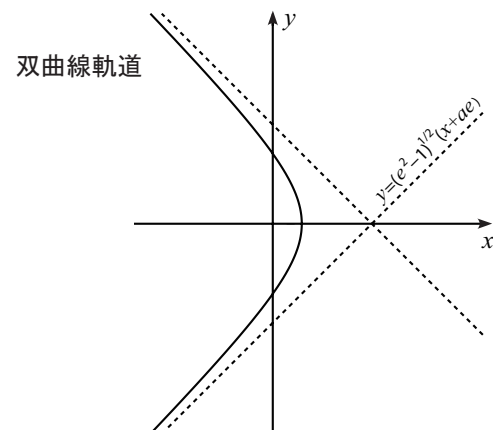
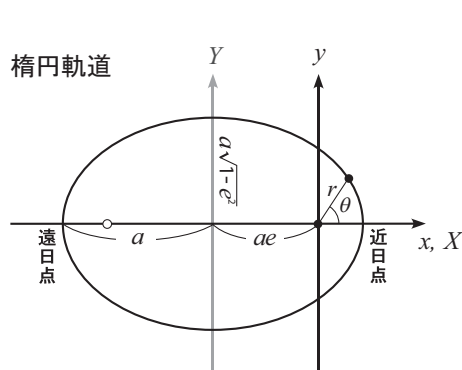
$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1. \quad (6.6)$$

- 極座標表示

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \quad (6.7)$$

- 軌道長半径  $a$ ，離心率  $e$  とエネルギー  $E (< 0)$ ，角運動量  $L$  との関係

$$a = -\frac{\alpha}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2}}. \quad (6.8)$$



- 双曲線軌道 ( $e > 1$ )

• (6.6)-(6.8) 式はそのまま使える. ( $a < 0$ ,  $e > 1$  に注意.)

• 無限遠からの入射速度  $v_0$ , 衝突パラメータ  $b$  と各定数との間の関係

$$E = \frac{1}{2}v_0^2, \quad L = bv_0, \quad |a| = \frac{G(M+m)}{v_0^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \quad (6.9)$$

• 散乱角

$$\varphi = 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{e} \right) = 2 \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + [bv_0^2/G(M+m)]^2}} \right\}. \quad (6.10)$$

## 6.2 重力多体系における緩和

### 6.2.1 緩和過程の概要

(a) 初期緩和

ビリアル平衡の成立 (運動エネルギーと重力ポテンシャルの釣り合い)

(局所) 熱平衡 (速度分布関数の緩和) には至らない.

例: 円盤系 (銀河, 微惑星円盤), 楕円銀河, 球状星団

→ 自己重力不安定に対し安定

(b) 円盤系, 球状星団におけるその後の緩和過程

- 2体散乱の重ね合わせにより進化 (緩和)  
(気体分子運動論と同様. 速度分布関数の緩和に寄与.)
- 円盤系: 円運動 + ランダム運動 (離心率, 傾斜角)  
ランダム運動は弱く, その緩和は速い
- 空間分布の対称性 (軸対称, 球対称 → 動径方向 1次元)

### 6.2.2 2体重力緩和による力学的摩擦 (dynamical friction)

力学的摩擦 (dynamical friction) とは

- 天体群の中を運動する 1つの天体に働く重力的な「ガス抵抗」
- 2つの天体群の間でエネルギー等分配 ( $m\langle V_m^2 \rangle = M\langle V_M^2 \rangle$ ) へ緩和する効果

以下では主に前者について考える.

(a) 静止している天体群中を 1つの天体 (質量  $M$ ) が運動している場合

- 設定
  - 質量  $M$  の天体の速度:  $V_M$
  - 天体群の天体 1つの質量:  $m$
  - 天体群の数密度:  $n$

- 1回の2体重力散乱による速度変化

相対速度は  $\mathbf{v} = \mathbf{V}_m - \mathbf{V}_M$ . 今の場合、入射相対速度は  $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{V}_M$ .

相対速度の変化は

$$\begin{aligned}\Delta v_{\parallel} &\equiv \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 / |\mathbf{v}_0| \\ &= v_0 (\cos \varphi - 1) = -2v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -\frac{2v_0}{1 + [bv_0^2/G(M+m)]^2}.\end{aligned}\quad (6.11)$$

$$|\Delta \mathbf{v}_{\perp}| = \frac{2v_0 [bv_0^2/G(M+m)]}{1 + [bv_0^2/G(M+m)]^2}.\quad (6.12)$$

天体  $M$  の速度変化は

$$\Delta V_{M\parallel} = -\frac{m}{M+m} \Delta v_{\parallel}.\quad (6.13)$$

(6.11) と (6.12) は多少複雑なので、次の簡易な見積方法も紹介しておく (impulse 近似). 重力相互作用が弱くほぼ直線の軌道で通り過ぎる天体  $m$  の速度変化は、 $M \gg m$  の場合

$$\Delta \mathbf{v}_{\perp} \sim \frac{F_{max}}{m} \Delta t \sim \frac{GM}{b^2} \frac{2b}{v_0} = \frac{2GM}{bv_0},\quad (6.14)$$

$$\Delta v_{\parallel} = v_0 (\cos \varphi - 1) = -v_0 \frac{1}{2} \varphi^2 \simeq -\frac{v_0}{2} \left( \frac{\Delta \mathbf{v}_{\perp}}{v_0} \right)^2 = -2v_0 \left( \frac{GM}{bv_0^2} \right)^2.\quad (6.15)$$

- 天体群による速度変化

一様に入射する天体群による2体重力散乱の重ね合わせを考えると  $\sum \Delta \mathbf{V}_{M\perp} = 0$ .

よって、 $\Delta \mathbf{V}_M = \Delta V_{M\parallel} \mathbf{v}_0 / |\mathbf{v}_0|$ . したがって、天体群による天体  $M$  の速度変化は

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}_M}{dt} &= \sum_{\text{単位時間あたり}} \Delta \mathbf{V}_M \\ &= nv_0 \int 2\pi b db \Delta \mathbf{V}_M \\ &= -n v_0 \int 2\pi b db \frac{m}{M+m} \frac{2v_0}{1 + [bv_0^2/G(M+m)]^2} \frac{\mathbf{V}_M}{|\mathbf{V}_M|} \\ &= -\frac{2\pi}{M+m} \left[ \frac{G(M+m)}{V_M^2} \right]^2 \ln(\Lambda^2 + 1) \rho_m V_M \mathbf{V}_M.\end{aligned}\quad (6.16)$$

ここで、 $\rho_m = mn$  は天体群の空間密度. また

$$\Lambda = \frac{b_{\max} V_M^2}{G(M+m)}.\quad (6.17)$$

上式は、天体群との重力相互作用が天体  $M$  の速度を減速させることを示している.

また、dynamical friction の実効的断面積はおおよそ次のようになる.

$$\sigma_{DF} \sim 2\pi \left[ \frac{G(M+m)}{V_M^2} \right]^2 \ln(\Lambda^2 + 1).\quad (6.18)$$

dynamical friction はこの断面積で「ガス抵抗力」を受けていると解釈できる.

「衝突パラメータの上限  $b_{\max}$  について」

- (6.16) 式の  $b$  についての積分で、積分上限を無限とすると対数的に発散する。  $b$  の物理的な上限値  $b_{\max}$  としては系の特徴的な大きさにとる（例：球状星団の半径、円盤の厚さ）。多くの系で、上で定義された  $\Lambda$  は  $> 100$  と大きい。そのため、  $b_{\max}$  の選び方に factor 2 程度の不定性があっても、対数  $\ln(\Lambda^2 + 1)$  への影響は小さい。
- 上式のように対数的だが積分上限  $b_{\max}$  が効くことから、dynamical friction では小角度散乱が重要なことがわかる。これより 2 体散乱の重ね合わせの近似は有効。

(b) 速度分布をもつ天体群中を 1 つの天体が運動している場合

- 天体群の速度分布：天体群の平均速度は 0 で、等方な Maxwell 速度分布を仮定。

$$f(|\mathbf{V}_m|) = \frac{1}{(2\pi\langle V_m^2 \rangle)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{V}_m|^2}{2\langle V_m^2 \rangle}\right). \quad (6.19)$$

- 速度分布をもつ天体群による天体  $M$  の速度変化は、  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V}_m - \mathbf{V}_M$  に注意して

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} &= \int d^3\mathbf{V}_m f(V_m) \times \frac{m n v_0}{M + m} \int 2\pi b db \frac{2v_0}{1 + [bv_0^2/G(M + m)]^2} \frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{v}_0|} \\ &= 2\pi\rho_m G^2(M + m) \int d^3\mathbf{V}_m f(V_m) \frac{\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_M}{|\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_M|^3} \ln(\Lambda^2 + 1). \end{aligned} \quad (6.20)$$

ここで、(6.20) 式右辺において弱い速度依存性をもつ因子  $\ln(\Lambda^2 + 1)$  を定数と近似しさらに「球対称密度分布中の重力場」の公式

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \int d^3\mathbf{r} G\rho(r) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -G \left( \int_0^{r_0} \rho(r) 4\pi r^2 dr \right) \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|^3} \quad (6.21)$$

を用いると、dynamical friction の表式を得る (Chandrasekhar 1943)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} &= -2\pi\rho_m G^2(M + m) \ln(\Lambda^2 + 1) \int_0^{V_M} f(V_m) 4\pi V_m^2 dV_m \frac{\mathbf{V}_M}{|\mathbf{V}_M|^3} \\ &= -2\pi\rho_m G^2(M + m) \ln(\Lambda^2 + 1) \left[ \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \frac{\mathbf{V}_M}{|\mathbf{V}_M|^3}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

ここで、2 番目の等号では (6.19) 式を用いた。  $X = V_M/\sqrt{2\langle V_m^2 \rangle}$  であり、誤差関数  $\operatorname{erf}(X)$  の定義は  $\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-x^2} dx$  である。  $\Lambda$  は次式で見積もるとよい。

$$\Lambda = \frac{b_{\max}(V_M^2 + \langle V_m^2 \rangle)}{G(M + m)}. \quad (6.23)$$

- 速度分散についての大小 2 つの極限をみておこう。速度分散が小さい極限 ( $\langle V_m^2 \rangle \ll V_M^2$ ) においては、(6.22) 式は  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$  なので (a) で求めた (6.16) 式に等しくなる。逆に、速度分散が大きい場合 ( $\langle V_m^2 \rangle \gg V_M^2$ ) は、(6.22) 式の [ ] の中は  $4X^3/(3\sqrt{\pi})$  となり、次式を得る。

$$\frac{d\mathbf{V}_M}{dt} = -\frac{2}{3}\sqrt{2\pi}\rho_m G^2(M + m) \ln(\Lambda^2 + 1) \frac{\mathbf{V}_M}{\langle V_m^2 \rangle^{3/2}} \quad (\text{for } \langle V_m^2 \rangle \gg V_M^2). \quad (6.24)$$

- (余談) 天体群の速度分散が大きい場合に、以下の見積りをしてしまうかもしれない。  
(a) の静止している天体群による抵抗は (6.16) と (6.18) より、 $M \gg m$  の場合

$$M \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} = -\sigma_{DF}(V_M) \rho_m V_M \mathbf{V}_M \quad (\propto V_M^{-2}) \quad (6.25)$$

と得られていた。これに対し、天体群の速度分散が大きい場合は、天体群が天体  $M$  の進行方向前面からは相対速度  $\langle V_m^2 \rangle^{1/2} + V_M$  で、後面からは相対速度  $\langle V_m^2 \rangle^{1/2} - V_M$  で、入射してくることになっており、天体  $M$  の速度進化をこの2方向からの寄与で近似すると

$$M \frac{dV_M}{dt} \simeq -\sigma_{DF}(\langle V_m^2 \rangle^{1/2} + V_M) \rho_m (\langle V_m^2 \rangle^{1/2} + V_M)^2 + \sigma_{DF}(\langle V_m^2 \rangle^{1/2} - V_M) \rho_m (\langle V_m^2 \rangle^{1/2} - V_M)^2 \quad (6.26)$$

と見積ることができそうである。右辺第1項は前面からの寄与で、第2項は後面からの寄与である。それぞれの寄与は相対速度の-2乗に比例するため、相対速度の小さい後面からの正の寄与が卓越し、結局 (6.26) 式の右辺は正になり、天体  $M$  は加速するという見積りとなっている。これは (6.24) と逆符号で間違っている。天体群の速度分布を正確に考慮した (6.22) 式では、速度  $V_M$  より大きな速度をもつ天体群の成分からの寄与は打ち消し合って、より小さい速度を持つ成分からの寄与のみが効くようになっているため、天体群の速さを  $\langle V_m^2 \rangle^{1/2}$  とした (6.26) 式の見積りは間違っている。

### 6.2.3 2体重力緩和による緩和時間

dynamical friction により天体速度  $\mathbf{V}_M$  が大きく変化する時間 (緩和時間)  $t_{\text{relax}}$  はおよそ

$$t_{\text{relax}} = V_M / \left| \frac{d\mathbf{V}_M}{dt} \right| \sim \frac{(V_M^2 + \langle V_m^2 \rangle)^{3/2}}{2\pi \rho_m G^2 (M + m) \ln(\Lambda^2 + 1)} \quad (6.27)$$

で与えられる。速度分布の緩和やエネルギー等分配等の緩和過程も、この緩和時間程度で進行する。また、(等質量系) 重力多体系における他の進化時間も以下に示しておく。

散乱時間:  $t_{\text{scatter}} \sim (Gm/v^3)$ ,      ビリアル平衡に要する時間:  $t_{\text{virial}} \sim 1/\sqrt{G\rho}$ ,

系全体の粘性進化時間:  $t_{\text{global}} \sim L^2/\nu \sim (L\Omega/v)^2 t_{\text{relax}}$

## 6.3 微惑星円盤における重力緩和

### 6.3.1 円盤系の特徴

#### (a) 運動の特徴

- 天体軌道はほぼ「同一平面上の円軌道」  
離心率  $e$ , 軌道面傾斜角  $i \ll 1$
- 相対速度の大きさ  $\neq R\Omega$   
 $v \simeq (e + i)R\Omega \ll R\Omega$

#### (b) 外場中における重力緩和の特徴

- 3体問題としての重力散乱  
– 潮汐力 (太陽重力+遠心力), コリオリ力の効果



- “particle-in-a-box” 近似が有効
  - 円盤と共に回転する系での 2 体重力散乱
  - 近似条件：2 体散乱時間  $\ll$  ケプラー周期
- 粒子系の粘性加熱 (viscous stirring)
  - 外場と重力散乱 (2 体 or 3 体) の相乗効果で相対速度が増加
  - 降着ガス円盤における粘性加熱と類似
  - 粘性係数  $\nu \sim (eR)^2/t_{\text{relax}}$

### 6.3.2 3 体問題の基礎方程式：ヒル方程式

#### (a) 局所回転座標系

太陽重力場内の 2 天体の重力散乱を調べるため局所回転座標系を用いる。

- 仮定： $e, i \ll 1 \rightarrow$  天体は回転系座標系とほぼ一緒に運動。
- 局所回転座標系  $(x, y, z)$  を次のように定義する。

$$\begin{cases} x = & R - R_0, \\ y = & R_0(\Theta - \Theta_0 - \Omega_0 t), \\ z = & Z. \end{cases} \quad (6.28)$$

ここで、 $\Omega_0 = \Omega(R_0)$ . 原点付近のみであれば直線座標とみなすことができる。

- 局所回転座標系におけるケプラー楕円軌道

$$\begin{aligned} x &= a - R_0 - eR_0 \cos[\Omega_0(t - \tau)], \\ y &= y_0 - \frac{3}{2}\Omega_0(a - R_0)t + 2eR_0 \sin[\Omega_0(t - \tau)], \\ z &= iR_0 \sin[\Omega_0(t - \omega)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

シア運動      エピサイクル運動 (or ランダム運動)

ここで、微小量  $e, i, (a - R_0)/R_0$  の 2 次以上の量は無視した。

#### (b) ヒル方程式

- 局所回転座標系における 2 天体の相対運動の方程式 (ヒル方程式) は以下で与えられる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{\Omega_0^2 \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}}_{\text{潮汐力}} - \frac{G(M+m)\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.30)$$

- 無次元化: 3 体問題における特徴的な長さであるヒル半径

$$r_H = \left( \frac{M+m}{3M_{\text{star}}} \right)^{1/3} R_0 \quad (6.31)$$

を用いて無次元変数  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/r_H$ ,  $t' = \Omega_0 t$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(r_H \Omega_0)$  を導入する。ヒル半径は天体の重力圏の半径と等しく、天体の半径に比例する。地球程度の天体で  $r_H \simeq R_0/100$  である。これらの無次元変数を用いて方程式を無次元化すると次式になる。

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = -2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}' + \begin{pmatrix} 3x' \\ 0 \\ -z' \end{pmatrix} - \frac{3\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (6.32)$$

Fig.1 にヒル方程式の解のいくつかの例を示した.

(c) 2 体散乱近似 (“particle-in-a-box” 近似) の有効性

入射時に  $e \gg r_H/R_0$  の場合には, 原点付近だけをみればほぼ双曲線軌道となっており「2 体散乱近似」は妥当. この条件式は惑星形成の多くの状況において満たされており, 衝突確率, 力学摩擦率, 粘性加熱率などを見積もる上で 2 体散乱近似は有効な近似法である.

### 6.3.3 微惑星の粘性加熱と平衡速度

(a) 粘性加熱による微惑星集団のランダム運動の励起

- 円盤内の微惑星集団の平均的な離心率 (または  $\langle e^2 \rangle^{1/2}$ ) は, 互いの重力散乱により励起される (粘性加熱). その増加率は  $v = \langle e^2 \rangle^{1/2} R\Omega$  として, 2 体近似を用いると

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v}{t_{\text{relax}}}. \quad (6.33)$$

と見積もられる. 2 体重力緩和時間  $t_{\text{relax}}$  は (6.27) 式で定義されたもので, 等質量系では

$$t_{\text{relax}} = \frac{(2v^2)^{3/2}}{4\pi\rho_m G^2 m \ln(\Lambda^2 + 1)}. \quad (6.34)$$

- 円盤系において, 微惑星集団の密度  $\rho_m$  は固体面密度  $\Sigma_d$  を用いて

$$\rho_m \simeq \Sigma_d / (v/\Omega) \quad (6.35)$$

で与えられるので,  $t_{\text{relax}}$  は  $v^4$  に比例する. これより離心率  $\langle e^2 \rangle^{1/2}$  は  $t^{1/4}$  に比例する.

- 傾斜角  $i$  も粘性加熱により同様な率で増加する. 比  $\langle e^2 \rangle^{1/2} / \langle i^2 \rangle^{1/2}$  は 2 程度になる.
- 粘性加熱率のより正確な値は, ヒル方程式を解くことにより求められている (e.g., Ohtsuki et al. 2002). これを用いることにより, 微惑星集団の  $N$  体計算の結果をほぼ完全に再現できている (Fig. 2 参照).

(c) ガス抵抗と平衡ランダム速度

- ガス抵抗によるランダム運動の速度  $v$  の減衰時間  $t_{\text{stop}}$  は次式で与えられる.

$$t_{\text{stop}} = \frac{mv}{\frac{1}{2} C_D \pi r_m^2 \rho_g v^2}. \quad (6.36)$$

ここで,  $r_m$  は天体  $m$  の半径. km サイズ以上の微惑星では  $C_D = 1$  である.

- 重力散乱による粘性加熱とガス抵抗との釣り合いによりランダム速度の平衡値が決まる. その値は  $t_{\text{relax}} = t_{\text{stop}}$  より見積もることができる. この釣り合いの式で, ガス密度に対し (2.7) 式を用い, 次式を得る.

$$\begin{aligned} v &\simeq \left[ \sqrt{\pi} \frac{\Sigma_d}{\Sigma_g} \frac{c}{v_{\text{esc}}} \ln(\Lambda^2 + 1) \right]^{1/5} v_{\text{esc}} \\ &\simeq \frac{1}{3} \left( \frac{\Sigma_d / \Sigma_g}{1/250} \right)^{1/5} \left( \frac{c}{1 \text{ km s}^{-1}} \right)^{1/5} \left( \frac{r_m}{r_{\text{Earth}}} \right)^{-1/5} v_{\text{esc}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

ここで,  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2Gm/r_m}$  は天体  $m$  の脱出速度であり, 天体半径に比例する. よって, 平衡ランダム速度は天体半径の  $4/5$  乗 (天体質量の  $4/15$  乗) に比例することがわかる.

- **サイズ分布をもつ微惑星集団の平衡ランダム速度**: 上の見積りでは、等質量系を仮定した。次節で説明するように、惑星形成では暴走成長によって幅広いサイズ分布をもつ。サイズ分布がある場合には、dynamical friction (エネルギー等分配) の効果により、サイズの大きな天体のランダム速度は小さな天体に比べ小さくなる。小さな天体の平衡のランダム速度は (6.37) 式を微修正することで見積もることができる。(6.37) 式で、 $v_{\text{esc}}$  と  $\Sigma_d$  には大きな天体の脱出速度と面密度、 $r_m$  には小さな天体の半径を用いるように修正するとよい。

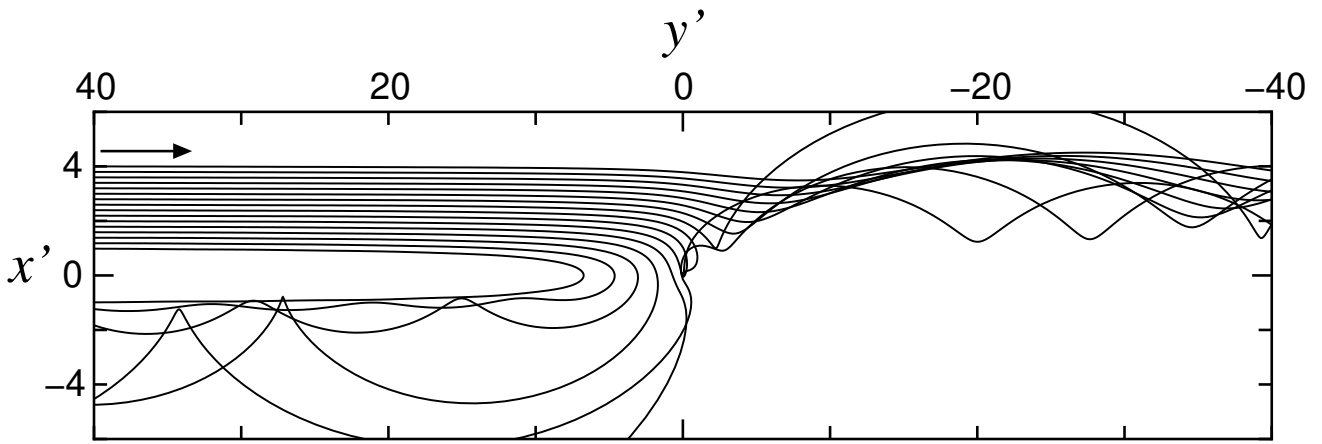


Figure 1: ヒル方程式の解のいくつかの例.  $e = i = 0$  で、 $x' = 1$  から 4 の間で入射させた場合. 2 体散乱における双曲線軌道とは全く異なった軌道となる.

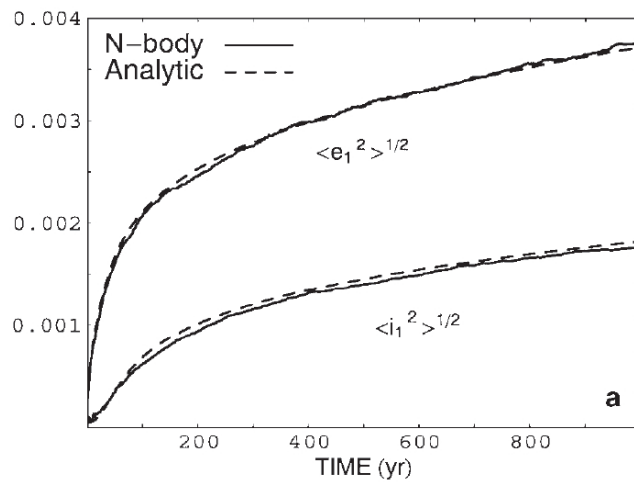


Figure 2:  $N$  体計算とヒル方程式から得られた粘性加熱率との比較 (Ohtsuki et al. 2002, Icarus の図 7 より転載). 図中の “Analytic” は得られた粘性加熱率をもとにした進化計算を指す.

## 7 惑星集積過程

### 7.1 惑星集積時間の簡単な見積り

- 惑星の成長方程式 ( $v_m \gg v_M$  の場合, 完全合体を仮定)

$$\frac{dM}{dt} = \rho_m \sigma_{\text{col}} v_m \quad (7.1)$$

- 衝突断面積 ( $M \gg m, v_m \gg v_M$  の場合)

- エネルギー保存:  $\frac{1}{2} v_m^2 = \frac{1}{2} v_m'^2 - GM/r_M$
- 角運動量保存:  $b v_m = r_M v_m'$

これらより衝突断面積は

$$\sigma_{\text{col}} = \pi r_M^2 \left( 1 + \frac{2GM}{r_M v_m^2} \right). \quad (7.2)$$

天体  $M$  の衝突断面積は重力によって増大する.

- 微惑星空間密度は (6.35) 式より  $\rho_m \simeq \Sigma_d \Omega / v_m$
- 集積時間 ( $M \gg m, v_m \gg v_M$  の場合)

$$t_{\text{grow}} = \frac{M}{\frac{dM}{dt}} \simeq \frac{M}{\pi r_M^2 \Sigma_d \Omega} \left( 1 + \frac{2GM}{r_M v_m^2} \right)^{-1} \quad (7.3)$$

等質量天体系 ( $M = m$ ) に対して,  $v_m \simeq v_{\text{esc}}/3$  を仮定して林モデル円盤を考えると

$$t_{\text{grow}} = \begin{cases} 3 \times 10^6 \left( \frac{M}{M_{\text{Earth}}} \right)^{1/3} \left( \frac{R}{1\text{AU}} \right)^3 \text{ yr} & (R < 2.7\text{AU}) \\ 1 \times 10^8 \left( \frac{M}{M_{\text{Earth}}} \right)^{1/3} \left( \frac{R}{5\text{AU}} \right)^3 \text{ yr} & (R > 2.7\text{AU}) \end{cases} \quad (7.4)$$

ガス捕獲に必要な 10 地球質量の固体核に成長する時間は, 木星軌道 (5AU) では  $2 \times 10^8$  年, 海王星軌道 (30AU) では  $4 \times 10^{10}$  年となり, ガス円盤の寿命 ( $10^7$  年) に比べて長すぎる.

⇒ 「木星型惑星形成時間の問題」

**課題 6:** (7.3) 式を等質量系の場合に使える式に修正し, (7.4) 式の見積りを導出せよ. 等質量系の式に修正する際には, 換算質量を用いた相対運動, 2 体衝突時の 2 体重心距離, 2 体間相対速度の 2 乗平均と 1 体の速度分散の関係に注意すること.

### 7.2 惑星集積の現代的モデル

- ・ 惑星集積前半: 暴走成長 (runaway growth) と寡占的成長 (oligarchic growth)
- ・ 惑星集積後半: 地球型惑星の巨大衝突 (giant impact) と木星型惑星によるガス捕獲

⇒ 従来の形成時間の問題は解決されたが, 新たなる問題 (惑星落下問題) が発生.

#### 7.2.1 暴走成長 (runaway growth)

- ・ 単純なモデルにおける暴走成長

- 2質量天体系：天体群  $m$  (小さい・多数) と天体群  $M$  (大きい・少数)
- 仮定：天体  $m$  のランダム速度  $v_m$  は、大きな天体の脱出速度  $v_{\text{esc}, M}$  より小さく、質量  $M$  に依存しない.
- 大きな天体の成長時間は (7.3) 式より,  $t_{\text{grow}} \propto v_m^2 M^{-1/3}$ .  
大きい微惑星ほど成長が加速される  $\Rightarrow$  暴走的な成長  
(大きい微惑星の成長が遅くなっている場合は秩序的成長.)

- $N$  体数値計算等による質量分布進化の結果 (Fig. 3)
  - べき質量分布を形成 (べき指数はおおよそ -2.5)
  - 簡単なモデルとは異なり, 分布先端の質量  $M$  が増加するとともに小さな天体のランダム速度は増大 ( $v_m \propto M^{1/6}$ ). その結果, 分布先端では  $t_{\text{grow}} \propto M^0$  となり時間に対し指数関数的な成長が起こる.

### 7.2.2 寡占的成長 (oligarchic growth)

- $N$  体数値計算 (Kokubo et al. 1998) により発見 (Fig. 4a)
- 少数の原始惑星がそれぞれ一定の「なわばり」をもちつつ成長. なわばりの動径方向の幅は  $\Delta R \sim 10r_H$  ( $\propto M^{1/3}$ )
- 成長時間は徐々に長くなる:  $t_{\text{grow}} \propto M^{1/3}$   
微惑星ランダム速度が  $v_m \sim v_{\text{esc}, M}/6$  と比較的小さい等の原因のために, 成長時間は (7.4) 式の見積りより 1桁程度短縮. これで木星形成時間の問題はほぼ解決される. 土星や天王星, 海王星の形成時間はまだ長すぎる. これらの惑星は内側で形成された後に外側に移動したとする説が有力.
- 質量分布は二極分化 (寡占的成長)
  - 速度の遅い中程度質量の微惑星は早期に原始惑星へ集積し消失.
  - 大きな原始惑星の間の質量比は大きくならない

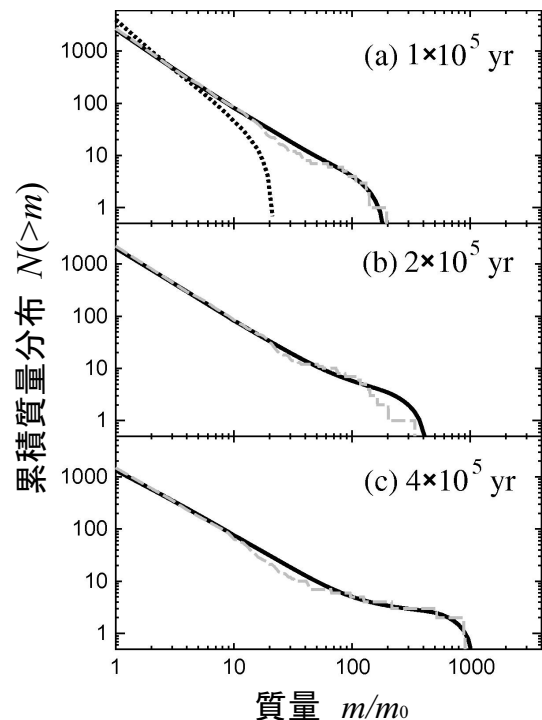


Figure 3:  $N$  体数値計算で得られた暴走成長における累積質量分布の進化 (Kobayashi et al. 2010, Icarus の図 1 より転載). 灰色の破線が  $N$  体数値計算 (Kokubo et al. 2000) の結果. 点線は初期質量分布. 実線は, 3 体問題計算より得られた衝突確率や粘性加熱率を用いた運動論的方程式から求められたもの. 最後の時間 (c) では, サイズ分布は二極化しており寡占的成長が進行している.

- 寡占的成長の最終質量, 孤立質量

寡占的成長で, すべての微惑星が原始惑星へ集積すると成長は停止する. このときの原始惑星質量は孤立質量 (isolation mass) と呼ばれる. 孤立質量  $M_{\text{iso}}$  は次の式で与えられる.

$$M_{\text{iso}} = \Sigma_{\text{d}} 2\pi R \Delta R. \quad (7.5)$$

$\Delta R = br_{\text{H}}$  とし, 林モデル円盤の面密度を用いると

$$M_{\text{iso}} = \sqrt{\frac{(2\pi b R^2 \Sigma_{\text{d}})^3}{3M_{\text{star}}}} = \begin{cases} 0.1 \left(\frac{b}{10}\right)^{3/2} \left(\frac{R}{1\text{AU}}\right)^{3/4} M_{\oplus} & (R < 2.7\text{AU}), \\ 3 \left(\frac{b}{10}\right)^{3/2} \left(\frac{R}{5\text{AU}}\right)^{3/4} M_{\oplus} & (R > 2.7\text{AU}). \end{cases} \quad (7.6)$$

1AU では, 原始惑星の寡占的成長は火星質量程度で停止する. 地球と金星の間隔は約  $30r_{\text{H}}$  で寡占的成長の間隔より広い. 地球や金星の形成には以下の原始惑星同士の巨大衝突が必要.

### 7.2.3 巨大衝突 (giant impact)

- 寡占的成長後の原始惑星同士の衝突は長期軌道不安定による離心率増加によって起こる. これは長期の軌道数値計算 (Chambers et al. 1996) によって示された.
- 不安定 (軌道交差) になる時間は原始惑星間隔  $\Delta R$  に対し指数的に増大 (Fig. 4b). 但し, 不安定時間は原始惑星の初期配置角度にも依存し 1桁程度の不定性がある.  $\Delta R = 8r_{\text{H}}$  の場合には, 軌道不安定になるまでにおおよそ  $10^8$  年かかる.
- 長期軌道不安定は林ガス円盤内では抑制され起こらないため, 円盤ガス消失後に巨大衝突は起こる.  $\Rightarrow$  木星形成後に地球完成か?
- 月は地球の巨大衝突でつくられたとする説が有力.

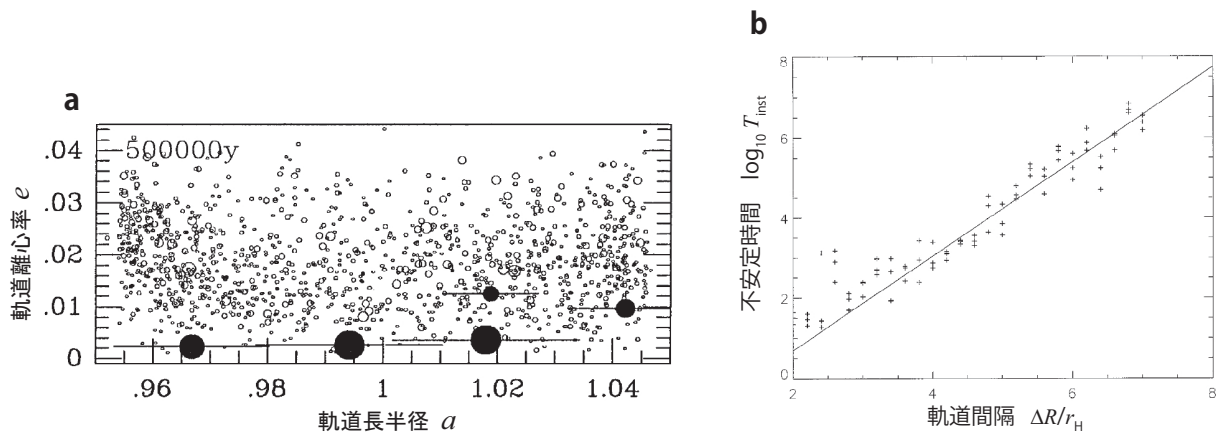


Figure 4: (a)  $N$  体数値計算で明らかになった寡占的成長の様子 (Kokubo et al. 2000, Icarus の図 7 より転載). 軌道長半径-離心率平面にて, 原始惑星 (●) と微惑星 (○) の分布を示した. 各丸印の大きさは天体半径に比例している. 原始惑星に付けた横棒は両側合わせて  $10r_{\text{H}}$  の長さをもつ. (b) 軌道不安定になる時間と原始惑星間隔の関係 (Chambers et al. 1996, Icarus の図 1 より転載). 3つの原始惑星を軌道間隔  $\Delta R$  で置き数値軌道計算で軌道交差するまでの時間を調べた. 各軌道間隔において, 3通りの原始惑星の初期配置角度に対して計算を行っている. 原始惑星の質量は  $1/3$  地球質量.

## 7.2.4 小石集積 (pebble accretion)

小石集積とは、微惑星を經由せず、大きめのダストである小石 (pebble) が直接惑星へ集積する集積様式。小石集積によって惑星成長が大幅に加速すると期待されている。

- 小石集積の集積半径

惑星から  $b$  だけ離れた地点での惑星への落下の終端速度  $v_{\text{ter}}$  は  $\frac{v_{\text{ter}}}{t_{\text{stop}}} = \frac{GM_p}{b^2}$  より

$$v_{\text{ter}} = \frac{GM_p t_{\text{stop}}}{b^2}. \quad (7.7)$$

この終端速度が惑星との相対速度より大きければ集積可能。相対速度がシア速度  $\frac{3}{2}\Omega b$  で与えられるとすると、集積条件は  $GM_p t_{\text{stop}}/b^2 > \frac{3}{2}\Omega b$  となり、(最大) 集積半径は

$$b_{\text{peb}} = \left( \frac{2GM_p t_{\text{stop}}}{3\Omega} \right)^{1/3} = r_H (2t_{\text{stop}}\Omega)^{1/3} \quad (7.8)$$

となる。  $t_{\text{stop}}\Omega \sim 1$  の小石では、集積半径はヒル半径程度と非常に大きくなる。また、  $t_{\text{stop}}\Omega > 10^{-3}$  であれば、微惑星の惑星への衝突断面の半径より大きくなる。

- 小石集積率は、小石の面密度  $\Sigma_{\text{peb}}$  を用いて次で見積ることができる。

$$\frac{dM_p}{dt} \sim \Sigma_{\text{peb}} b_{\text{peb}}^2 \Omega = \Sigma_{\text{peb}} r_H^2 (2t_{\text{stop}}\Omega)^{2/3} \Omega. \quad (7.9)$$

- 小石集積の効率

小石の落下速度は (4.10) 式より  $V_R = 2\eta R \Omega (t_{\text{stop}}\Omega)$  と速いため、落下で消失し  $\Sigma_{\text{peb}}$  が低下してしまう可能性がある。円盤内の小石の降着率  $\frac{dM_{\text{peb}}}{dt}$  は

$$\frac{dM_{\text{peb}}}{dt} = 2\pi R \Sigma_{\text{peb}} V_R = 2\pi R \Sigma_{\text{peb}} \eta R \Omega (2t_{\text{stop}}\Omega). \quad (7.10)$$

で与えられる。(7.9), (7.10) 式から  $\Sigma_{\text{peb}}$  を消去すると

$$\frac{dM_p}{dt} \sim \left( \frac{r_H}{R} \right)^2 (2\pi\eta)^{-1} (2t_{\text{stop}}\Omega)^{-1/3} \frac{dM_{\text{peb}}}{dt} \quad (7.11)$$

$$\simeq 0.01 \left( \frac{M_p}{M_{\oplus}} \right)^{2/3} \left( \frac{\eta}{2 \times 10^{-3}} \right)^{-1} (t_{\text{stop}}\Omega)^{-1/3} \frac{dM_{\text{peb}}}{dt}. \quad (7.12)$$

よって、  $t_{\text{stop}}\Omega \sim 1$  の場合、小石の降着率の1%程度しか、惑星に集積しない。

- 小石集積の短所

- 小石集積の効率は悪く、大部分は中心星に落ちてしまう。

$t_{\text{stop}}\Omega$  を小さくすれば効率が上がるが、集積半径は小さくなる。

- 円盤外側の低温領域から供給される「小石」は氷ダストが主原料。

岩石惑星形成には適さない。

## 8 微惑星の衝突破壊

微惑星のランダム速度が原始惑星の摂動により十分加速されると、微惑星の衝突破壊が顕著になる。重力で集積している微惑星の場合、最も簡単な見積りでは微惑星のランダム速度がその脱出速度を超えると破壊が顕著になると考えられる。しかし、以下の詳細な見積りによると微惑星はそれよりもずっと破壊されにくい。詳細な見積りのためにまず天体の衝突破壊の物理について説明する。

### 8.1 天体衝突破壊のスケーリング則

高速衝突による固体天体の破壊について考える。高速衝突では小さな衝突体でも衝突された天体の広範囲を破壊し大量の破片を放出させる。そのため点源爆発の近似が有効であり、衝突破壊の結果は様々な衝突条件に対して自己相似的となる<sup>3</sup>。

一般の衝突破壊の結果は衝突天体 (impactor) の半径  $R_{\text{imp}}$  と衝突速度  $v_{\text{imp}}$  に独立に依存する。これに対し点源近似が有効な高速衝突では、衝突天体に関してはカップリングパラメータと呼ばれる

$$C = R_{\text{imp}} v_{\text{imp}}^{\mu} \quad (8.1)$$

という1つの量が、衝突破壊の結果を決めることが知られている (Housen and Holsapple 2011)。べき指数  $\mu$  は衝突された天体 (target) の物性に依存する定数で、多くの物質で 0.41 (砂) ~ 0.55 (岩石, 水) の間の値をとる<sup>4</sup>。その他、衝突破壊の結果はターゲット天体の破壊強度や重力、密度に依存する<sup>5</sup>。このカップリングパラメータを用いて、天体衝突破壊のスケーリング則が構築されている。

カップリングパラメータを用いて、衝突破壊でクレータが形成される際の破片速度分布を導出してみよう。ターゲット天体表面からの放出速度が  $v$  よりも速い破片の総質量  $M_f(>v)$  は、積算速度分布を与える。 $M_f(>v)$  は速度の閾値  $v$  とカップリングパラメータ  $C$ 、ターゲットの密度  $\rho$  に依存する。破片の低速度成分の総質量はターゲット天体の破壊強度や重力にも依存する。実際、形成されるクレータ全体の大きさや容積は破壊強度や重力に依存する。一方、破片の高速度成分は破壊の激しい衝突点付近から放出されるので、それらの破片の運動は破壊強度や重力に影響されない。そのため、閾値  $v$  が十分速い場合に  $M_f(>v)$  は  $C$  と  $v$  と  $\rho$  のみに依存し、次元解析から質量の次元をもつ  $M_f(>v)$  は

$$M_f(>v) = A\rho C^3/v^{3\mu} \quad (8.2)$$

の形で与えられる。無次元の係数  $A$  はターゲットの物性に依存する。衝突の室内実験より、ターゲットが砂の場合  $A = 0.14$  で、岩の場合  $0.59$  と得られている。

スケーリング則は点源近似に基づいているため、(8.2) の公式は、 $M_f(>v)$  がインパクト質量  $m_{\text{imp}}$  と同程度となる高速度域には適用できないと予想される。しかしながら、室内衝突実験や数値計算の結果、 $M_f(>v) \sim m_{\text{imp}}$  の範囲でもこの公式は適用可能であることが示されている。 $M_f(>v) = m_{\text{imp}}$  となる閾値速度  $v$  は、砂のターゲットの場合は衝突速度の  $1/16$  で、岩の場合は  $1/3$  である。

衝突の結果ターゲット天体から放出される質量  $M_{\text{eject}}$  も見積ることができる。 $M_{\text{eject}}$  は脱出速度を越えた速度をもつ破片の総質量であるので

<sup>3</sup>100m/s 以上の衝突であれば、このような点源近似は良い近似である。地球サイズの摂動天体のまわりでは微惑星の衝突速度は 1km/s 以上となり、この条件は満たされる。

<sup>4</sup>実際は、カップリングパラメータの他に、衝突角度も衝突破壊の結果を左右する。多くの衝突実験で主に正面衝突 (衝突角度 90 度) が調べられているが、斜め衝突の場合には  $v_{\text{imp}}$  を法線方向成分  $v_{\text{imp}} \sin \theta$  で置き換えることで正面衝突の結果を適用できる。

<sup>5</sup>衝突破壊のスケーリング則では、impactor と target の密度が異なる場合も考えられているが、ここでは両者の密度は同じとする。



$$M_{\text{eject}} = M_f(> v_{\text{esc}}) = \frac{3A}{4\pi} \left( \frac{v_{\text{imp}}}{v_{\text{esc}}} \right)^{3\mu} m_{\text{imp}} \quad (8.3)$$

を得る。これより、 $M_{\text{eject}} > m_{\text{imp}}$  となるのは、衝突速度が脱出速度の16倍(砂)または3倍(岩)を越える場合であることがわかる。

(8.3)式は破壊強度が重要でない重力支配域に対する公式である。半径が約10km程度以上の天体(脱出速度が約10m/s以上の天体)であれば重力支配域に対する(8.3)式が使える。強度の低いラッブルパイル天体であればさらに小さい天体でも適用可能である。惑星形成時の微惑星天体は、頻繁に衝突を繰り返して多くのひびや掘削を経験していると考えられるので、ラッブルパイル天体を想定するのが自然であろう。ラッブルパイル天体では、上記のスケーリング則で「砂」の場合を用いることができる。

天体衝突による大規模破壊の条件を見積る上で、衝突エネルギー  $E_{\text{imp}}$  または  $Q = E_{\text{imp}}/m_{\text{tar}}$  という量が多く用いられる。特に、 $M_{\text{eject}} = m_{\text{tar}}/2$  という破壊を起こす  $Q$  の値は  $Q_D^*$  と呼ばれ、多くの研究で大規模破壊のため衝突エネルギーの閾値として用いられている。 $Q_D^*$  をスケーリング則から見積もってみよう。(8.3)式より、 $M_{\text{eject}} = m_{\text{tar}}/2$  という大規模破壊を起こすインパクターの質量は、重力支配の場合

$$m_{\text{imp}} = \frac{2\pi}{3A} \left( \frac{v_{\text{esc}}}{v_{\text{imp}}} \right)^{3\mu} m_{\text{tar}} \quad (8.4)$$

と見積もられる。これより、重力支配の場合での  $Q_D^*$  は次式でおおよそ与えられる。

$$Q_D^* = \frac{\pi}{3A} \left( \frac{v_{\text{esc}}}{v_{\text{imp}}} \right)^{3\mu} v_{\text{imp}}^2 \quad (8.5)$$

$3\mu < 2$  であるので、 $Q_D^*$  は衝突速度の増加関数である。小さなインパクターを高速度で衝突させ大規模破壊を引き起こす場合、大きなインパクターで同様な破壊を起こすのに比べて、より大きな衝突エネルギーが必要になる。

厳密に考えると、(8.3)式はクレーターをつくる小規模な破壊を想定し導出されたため、 $M_{\text{eject}} \sim m_{\text{tar}}$  となる大規模破壊に対しては適用できないと予想される。しかしながら、天体衝突の数値計算の結果から、 $M_{\text{eject}} = m_{\text{tar}}/2$  となる衝突破壊でも(8.3)式はよい精度で成り立つことが示されている(Suetsugu et al. 2018)。

重力よりも破壊強度で衝突破壊が決まる場合についてもふれておく。強度支配の場合には、破片速度分布に実質的な下限速度がある。その下限速度は破壊強度  $Y$  を用いて  $\sim (Y/\rho)^{1/2}$  と与えられる。下限速度  $\sim (Y/\rho)^{1/2}$  が脱出速度より大きい場合が、強度支配の場合にあたる。重力支配の場合の(8.3)-(8.5)式で、 $v_{\text{esc}}$  を  $(Y/\rho)^{1/2}$  で置き換えることで、強度支配の場合の式を得ることができる。

## 8.2 惑星形成時の微惑星の破壊条件

前節の結果より、微惑星がラッブルパイル天体のようなものと想定すると質量  $m$  の微惑星の衝突破壊の条件は

$$v_{\text{imp}} > 16v_{\text{esc}}(m) \quad (8.6)$$

となる。微惑星天体が固結した岩石や氷できている場合、より低速度で破壊が起こる。微惑星の衝突速度はそれらのランダム速度程度である。惑星形成時のランダム速度は、摂動天体である大きな惑星の質量  $M$  と円盤ガス密度に依存するが、最小質量円盤では次式で与えられる。

$$v_{\text{imp}} \simeq \frac{1}{6}v_{\text{esc}}(M) = 1.8 \left( \frac{M}{M_{\oplus}} \right)^{1/3} \text{ km/s.} \quad (8.7)$$

よって、微惑星の破壊条件 (8.6) は

$$v_{\text{esc}}(m) < \frac{1}{100} v_{\text{esc}}(M) \quad (8.8)$$

となる。脱出速度は天体半径と密度の1/2乗に比例するので、衝突で破壊される微惑星の半径に対する条件は

$$R_m < \frac{1}{100} \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/2} R_M \quad (8.9)$$

となる。例えば、摂動天体が地球質量であるときには半径90km以下の微惑星が破壊される。微惑星天体が固結した岩石や氷でできている場合はより大きい半径でも破壊が起こる。

衝突破壊は衝突時間程度で進行する。衝突時間  $t_{\text{col}}$  は

$$t_{\text{col}} = (n\sigma v_{\text{imp}})^{-1} \quad (8.10)$$

で見積もられる。天体は全て半径  $R$ 、質量  $m = 4\pi\rho R^3/3$  をもつとすると、衝突断面積  $\sigma$  は  $4\pi R^2$  で、数密度  $n$  は固体面密度  $\Sigma_d$  を用いて  $n = \Sigma_d/(mH)$  で与えられる。また微惑星分布の厚さ  $H$  は  $v/\Omega$  である。これらより、衝突時間は、最小質量円盤の固体面密度を用いて

$$t_{\text{col}} = \frac{\rho R}{3\Sigma_d\Omega} = 2 \times 10^5 \left( \frac{R}{100\text{km}} \right) \left( \frac{r}{1\text{au}} \right)^3 \text{yr} \quad (8.11)$$

と見積もられる。この時間で衝突破壊は進行する。その結果惑星成長の材料である微惑星が衝突破壊により失われることで、惑星成長は阻害されてしまう (Kobayashi & Tanaka 2018)。

### 8.3 衝突破壊でつくられる天体サイズ分布

摂動天体のまわりで小天体は破壊されることを上で示した。ここでは衝突破壊による天体の進化について考えてみる。衝突破壊で天体はより小さな破片となる。生成された破片は摂動天体の摂動を受け再度高速衝突を起こし破壊される。この連鎖的な衝突破壊は衝突カスケードと呼ばれる。衝突カスケードが起こった結果、天体は極めて小さな破片へと変換される。

衝突カスケードの結果生成された破片はべきサイズ分布を持つことが知られている。実際、多数回の衝突破壊で形成されたと考えられている小惑星やカイパーベルト天体のサイズ分布のべき指数は-3程度と見積もられている (Bottke et al. 2005; Fraser et al. 2014)。

衝突カスケードによるサイズ分布は、最終的にはミクロンサイズのダストにまで続く。このサイズ以下になるとダストは中心の恒星の輻射圧により飛ばされ失われる。太陽系以外の、他の惑星系における衝突カスケードは、デブリ円盤としてそのダスト成分が観測されている。以下では、衝突カスケードでどのようにべきサイズ分布がつくられるかを見てみよう。

#### (a) 自己相似的衝突による衝突カスケード

衝突カスケードでは、大きな天体が破壊され、さらに多数回の衝突破壊を経て、小さな破片へと変換される。各段階の破壊は衝突時間  $t_{\text{col}}$  で進行し、天体はより小さな破片に変換される。定常状態にある衝突カスケードでは、小さい破片への質量の流れはサイズに依らず一定でなければならない。この要請からサイズ分布に制限が付く。

各天体サイズにおける小さいサイズへの質量変換率を見積もろう。(単位体積当たりの) 個数サイズ分布を  $n(R)$  と書くと、半径  $R \sim R + \Delta R$  の範囲の天体の(単位体積当たりの) 個数は、 $n(R)\Delta R$  で、それらの総質量は、 $mn(R)\Delta R$  で与えられる。

各サイズにおいて、サイズ比が等しい衝突では同じような破壊が起こると仮定する。そのような自己相似的な衝突破壊が実現されていれば、衝突1回当たりの小さいサイズへの平均的な質量移動量は衝突天体の質量に比例し、その比例定数はサイズによらず一定となる。

自己相似的な衝突破壊を仮定すると、各サイズの天体は衝突時間  $t_{\text{col}}$  くらいで、小さいサイズへ変換されるので、質量変換率は

$$mn(R)\Delta R/t_{\text{col}} \quad (8.12)$$

とおおよそ見積ることができる。衝突時間  $t_{\text{col}}$  は

$$t_{\text{col}} = (n(R)\Delta R\sigma v_{\text{imp}})^{-1} \quad (8.13)$$

で与えられる。衝突断面積  $\sigma$  は  $\sim R^2$  であり、また衝突速度  $v_{\text{imp}}$  はサイズに依らないと仮定すると

$$t_{\text{col}} \propto (n(R)\Delta RR^2)^{-1} \quad (8.14)$$

というサイズ依存性をもつ。これを (8.12) 式に代入し、さらに  $\Delta R \sim R$  とすると、質量変換率は  $R^7 n(R)^2$  に比例することがわかる。従って、質量変換率が  $R$  に依存しないので、定常は自己相似的な衝突カスケードの天体サイズ分布は

$$n(R) \propto R^{-3.5} \quad (8.15)$$

というべき分布となる (Dohnanyi 1969, Tanaka et al. 1996)。これは小惑星やカイパーベルトより少し急な傾きとなっている。また、各サイズでの衝突時間は  $R^{1/2}$  に比例し、衝突カスケードの上流ほど衝突時間が長い。そのため衝突カスケードの寿命は大きな天体の破壊で決まる。

#### (b) 現実的な天体衝突における衝突カスケード

§8.1 で見たように、衝突破壊による放出質量は脱出速度に依存していて、衝突速度が一定であれば、ターゲット天体が小さいほど、サイズ比が等しい衝突ではターゲット質量に対する放出質量の割合は大きくなる。また  $M_{\text{eject}} = m_{\text{tar}}/2$  という大規模破壊は一定の質量比で起こるのではなくそのような衝突での質量比  $m_{\text{imp}}/m_{\text{tar}}$  は (8.4) 式より  $v_{\text{esc}}^{3\mu}$  に比例する。従って、実際の天体衝突は (a) で仮定したような自己相似的なものではない<sup>6</sup>。

しかし、このような現実的な天体衝突の場合においても解析的にサイズ分布を求めることができる。各サイズの間で同じ質量比の衝突を比べるのでなく、 $(v_{\text{esc}}/v_{\text{imp}})^{3\mu}$  に比例する質量比の衝突を比べることにすれば、各サイズの間で同様な破壊が起こり実質的に自己相似性が成り立つ。

各サイズで別のサイズ比の衝突に着目すると、衝突時間の見積りが変わってくる。 $t_{\text{col}}$  の見積りもりでサイズ比  $R_{\text{imp}}/R_{\text{tar}}$  を考慮すると、衝突時間は impactor の個数と target の断面積で決まり

$$t_{\text{col}} \propto (n(R_{\text{imp}})R_{\text{imp}}R_{\text{tar}}^2)^{-1} \quad (8.16)$$

のように比例する。さらに  $n(R) \propto R^{-\alpha}$  とし、 $R_{\text{imp}}/R_{\text{tar}} \propto (m_{\text{imp}}/m_{\text{tar}})^{1/3} \propto v_{\text{esc}}^{\mu} \propto R_{\text{tar}}^{\mu}$  を用いると

$$t_{\text{col}} \propto R_{\text{imp}}^{\alpha-1} R_{\text{tar}}^{-2} \propto R_{\text{tar}}^{(1+\mu)(\alpha-1)-2} \quad (8.17)$$

というターゲット半径依存性を得る。これを (8.12) 式に代入すると質量変換率は  $R_{\text{tar}}^{5-(2+\mu)(\alpha-1)}$  に比例することがわかる。これが  $R_{\text{tar}}$  の依存性を持たないことから、サイズ分布のべき指数は

$$\alpha = \frac{7 + \mu}{2 + \mu} \quad (8.18)$$

と求まる (O'Brien & Greenberg 2003, Kobayashi & Tanaka 2010)。「砂」の場合  $\mu = 0.42$  で  $\alpha = 3.07$  となり、また「岩」の場合は  $\mu = 0.55$  で  $\alpha = 2.96$  となり、どちらの場合も小惑星やカイパーベルト天体のサイズ分布の観測値に近い。またこの場合、衝突時間は  $t_{\text{col}} \propto R_{\text{tar}}^{(1+3\mu)/(2+\mu)}$  という依存性を持ち、やはり大きい天体ほど衝突時間（または破壊までの寿命）が長い。

<sup>6</sup>これに対し、強度支配の場合は強度にサイズ依存がなければ自己相似的な破壊となる

## 9 ガス捕獲と木星型惑星形成

### 9.1 木星型惑星の形成シナリオ

(a) 惑星が大気を持つための条件

$$c^2 < \frac{GM}{r_M} \sim v_{\text{esc}}^2 \quad (9.1)$$

300K では月程度 ( $10^{25}$ g) 以上の天体で条件を満たし、大気を持つ。

(b) ガス捕獲の開始

- 惑星質量において大気質量が占める割合は固体コア質量とともに増加。  
大気質量～固体コア質量となると、大気は重力不安定 (Mizuno 不安定) となる。  
(大気構造の静水圧解の消失.)  
そのため大気重力収縮 (Kelvin-Helmholtz 収縮) が起こり、円盤ガスの惑星への降着が開始される。
- 臨界コア質量：大気が重力不安定となるコア質量。
  - 微惑星集積による表面加熱や大気の大きな opacity は大気を安定化するので  
臨界コア質量は微惑星集積率や大気 opacity (ダスト量) とともに増大。
  - 臨界コア質量は地球質量の 5-20 倍と考えられている (Mizuno 1980; Ikoma et al. 2000).

(c) ガス捕獲の停止時期と木星型惑星の最終質量。

これについては現在も議論が進んでいる。

- 説 1：惑星付近 ( $\Delta R \sim 10r_H$ ) のガスを捕獲した時点。  
問題点：ガス円盤降着があれば円盤外側からガスはさらに供給される。
- 説 2：惑星が付近のガスを強く跳ね飛ばし、深い「円盤 gap」を形成するような質量に成長した時点。 (条件式  $r_H > c/\Omega$ )  
問題点：円盤 gap はガス捕獲を停止させるほど深くならない (Kanagawa et al. 2015, Tanigawa & Tanaka 2016).
- 説 3: ガス円盤が消失した時点。  
ガス円盤の消失は、惑星または中心星への降着、磁気円盤風、中心星輻射による円盤光蒸発により起こる。

### 9.2 木星型惑星形成のための臨界コア質量の見積り

Stevenson (1982) による近似的な見積りを紹介する。

(a) 大気に対する仮定

- 輻射大気 (対流なし), オパシティー  $\kappa$  は一定
- コアへの微惑星集積が加熱源。  
それによるルミノシティーは  $L = GM_c \dot{M}_c / r_c$  ( $M_c, r_c$  はコア質量とコア半径).

(b) 基礎方程式

$$\text{静水圧方程式} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}, \quad (9.2)$$

$$\text{輻射大気の温度分布} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{16\sigma T^3} \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (9.3)$$

$$\text{状態方程式} \quad \frac{P}{\rho} = \frac{kT}{\mu m_{\text{H}}}. \quad (9.4)$$

(c) 大気密度分布の近似解と大気質量

(9.2) 式において  $M_r$  を近似的に惑星全質量  $M_p (= M_c + M_{\text{env}})$  で置きかえる。すると、(9.3) 式を (9.2) 式で割って次式を得る。

$$\frac{dT^4}{dP} = \frac{3\kappa L}{16\pi\sigma GM_p} \equiv A \quad (\text{定数}). \quad (9.5)$$

$r \rightarrow \infty$  で円盤温度  $T_{\text{disk}}$ , 円盤圧力  $P_{\text{disk}}$  に接続するとし、さらに  $T \gg T_{\text{disk}}$ ,  $P \gg P_{\text{disk}}$  を仮定すると、 $T^4 = AP$  を得る。これと状態方程式 (9.4) より

$$\rho = \frac{\mu m_{\text{H}}}{kA} T^3. \quad (9.6)$$

を得る。この式を用いると、(9.3) 式は容易に積分でき、次の大気温度分布を得る。

$$T = \frac{\mu m_{\text{H}} GM_p}{4kr}. \quad (9.7)$$

大気の密度分布  $\rho(r)$  は (9.6), (9.7) 式より得られる。密度分布から大気質量  $M_{\text{env}}$  の表式も得ることができる。

$$\begin{aligned} M_{\text{env}} &= \int_{r_c}^{r_B} \rho(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \left( \frac{\mu m_{\text{H}} GM_p}{k} \right)^4 \frac{\pi^2 \sigma}{3\kappa L} \log \left( \frac{r_B}{r_c} \right). \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで、 $r_B (= GM_p/c^2)$  は惑星の Bondi 半径である。

(d) 臨界コア質量

大気質量が全質量  $M_p$  の関数として与えられたので、コア質量

$$M_c = M_p - M_{\text{env}}(M_p) \quad (9.9)$$

も  $M_p$  の関数である。(9.8) 式より大気質量は  $M_p$  の増加と共に急激に増大するため、コア質量  $M_c$  はある  $M_p$  で最大値をとることがわかる。この最大値が臨界コア質量  $M_{c,\text{crit}}$  である。(9.9) 式を  $M_p$  で微分すると左辺  $= dM_c/dM_p = 0$  で、右辺は  $M_{\text{env}} \propto M_p^4$  に気を付けて微分することで、臨界コア質量に対応する全質量  $M_{p,\text{crit}}$ , 大気質量  $M_{\text{env,crit}}$  に対する条件式

$$M_{\text{env,crit}} = \frac{1}{4} M_{p,\text{crit}} = \frac{1}{3} M_{c,\text{crit}} \quad (9.10)$$

を得る。これを (9.8) 式に代入することで、臨界コア質量  $M_{c,\text{crit}}$  の表式を次式のように得る。

$$M_{c,\text{crit}} = \left[ \left( \frac{3k}{4\mu m_{\text{H}} G} \right)^4 \frac{\kappa G (4\pi \rho_c / 3)^{1/3}}{\pi^2 \sigma \log(r_B/r_c)} \left( \frac{\dot{M}_c}{M_c} \right) \right]^{3/4}. \quad (9.11)$$

典型的な値を用い、また  $\log(r_B/r_c) \simeq 5$  とすると、臨界コア質量は次のように見積もられる。

$$M_{c,\text{crit}} \simeq 5 \left( \frac{M_c/\dot{M}_c}{5\text{Myr.}} \right)^{-3/4} \left( \frac{\kappa}{0.01\text{cm}^2/\text{g}} \right)^{3/4} \left( \frac{\rho_c}{2\text{g}/\text{cm}^3} \right)^{1/4} M_{\oplus}. \quad (9.12)$$

ここで仮定した吸収係数 ( $\kappa = 0.01\text{cm}^2/\text{g}$ ) は星間ガスの値に比べ2桁ほど小さい。原始惑星系円盤や惑星大気でのダスト成長や微惑星形成によるダストの消費によって、この程度吸収係数が減少していてもよいと考えられる。

課題 7: (9.5), (9.11), (9.12) 式をそれぞれ導出せよ。

## 10 惑星形成論における主要課題

### (a) 微惑星形成の問題

- ダストの中心星への落下前に微惑星は形成されるか？
- 微惑星形成は重力不安定で起こる？またはダスト成長で？
- ダスト成長や微惑星形成の現場を観測的に制約・解明することはできるか？

### (b) 惑星落下の問題

- ガス円盤との相互作用による惑星落下は止められるか？ $\Rightarrow$  gap 形成が鍵。
- 系外惑星の形成論：惑星落下・移動が必要と考えられている。  
太陽系と系外惑星の統一的形成理論が必要
- 巨大ガス惑星のガス捕獲開始の時期。また、ガス捕獲ほどの程度の速さで進行し、いつ止まるか？

### (c) 微惑星破壊の問題

原始惑星のまわりの微惑星は高速で衝突し破壊される。小さな破片はガス抵抗で中心星へ急速に落下し、固体面密度は低下。

### (d) 太陽系惑星と系外惑星の違い

太陽系惑星とそれと異なった系外惑星（ホットジュピターやエキセントリックプラネット）はどのような原因、メカニズムによって作り分けされたのか？

### (e) 太陽系小天体の諸問題

- 彗星、オールト雲の起源：オールト雲は彗星の巣であり、木星等の摂動でつくられた。その形成時に摂動を受けた大部分の微惑星は太陽系外等へ放出されるため、大量の微惑星が必要。
- コンドライト隕石の起源：コンドライト隕石に普遍的に含まれるコンドリュールは、ミリサイズの球形の岩石粒子で、宇宙空間で 1500K 程度に加熱され、融解して球形になったと考えられている。そのような高温現象を原始惑星系円盤のどこでどのように起きたのか？また、コンドリュールの生成期間は2百万年と長期間。